

「デジタル信号処理の基礎」

(第1日)

2014.11.10-11

東京電機大学

金田 豊

kaneda@c.dendai.ac.jp

<http://www.asp.c.dendai.ac.jp/>

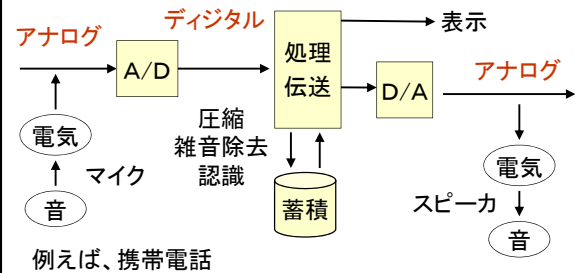
講習概要 (基礎編)

1. アナログ信号とデジタル信号
2. 時間領域と周波数領域
3. 線形システム
4. デジタルフィルタ

講習概要 (発展編)

5. 伝達関数による対象系のモデル化
6. インパルス応答の測定法
7. 逆フィルタ
8. 適応フィルタとその応用

音の伝送とデジタル信号処理



1. アナログ信号とデジタル信号

- ① A/D(アナログ→デジタル)変換
- ② 標本化定理
- ③ D/A(デジタル→アナログ)変換
- ④ 最近のA/D, D/A 変換技術
- ⑤ 標本化定理再考
- ⑥ デジタル世界とアナログ世界

A/D(アナログ→デジタル)変換の手順

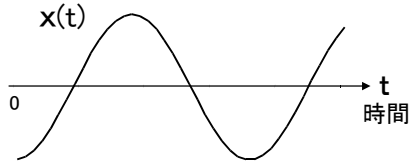
アナログ信号

→ 標本化(サンプリング)

→ 量子化

→ デジタル信号

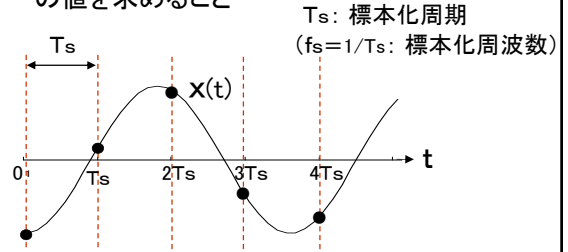
アナログ信号(連続信号)



- ・ 時間とともに値が連続的に変化
 - ・ どの時刻においても値を持つ
- t: 実数

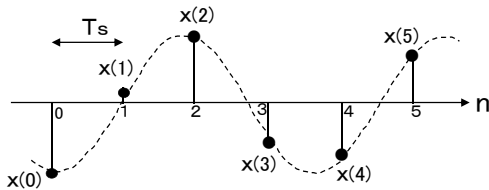
標本化(サンプリング)

一定の周期 T_s でアナログ信号 $x(t)$ の値を求めること



標本化した信号 = 離散(時間) 信号

離散(時間)信号 $x(n)$



- ・ 時間が整数値 (T_s を単位) \rightarrow 整数 n で表す。
- ・ アナログ時間との対応は $t=n \cdot T_s$
- ・ 振幅は実数値であるので
離散信号は**実数の数列**

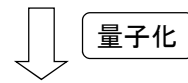
$\{x(0), x(1), x(2), x(3), \dots\} \Rightarrow$ まとめて
 $x(n)$
と表す

例) $\{-5.9, 0.1, 3.29, -2.333, \dots\}$

離散信号からデジタル信号

離散信号 = 実数の数列

$\{x(0), x(1), x(2), \dots\}$

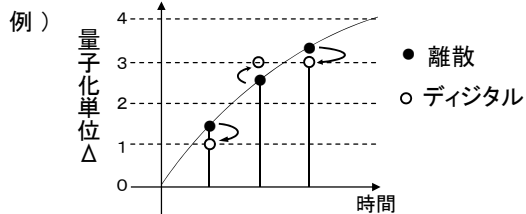


デジタル信号 = 整数の数列

$\{x(0)', x(1)', x(2)', \dots\}$

量子化

(離散信号) 実数値振幅 \rightarrow 整数値振幅(デジタル信号)
量子化単位 Δ を定め、その整数倍の値として表す



離散 $x(n) : \{1.41\Delta, 2.62\Delta, 3.3\Delta, \dots\}$

デジタル $x'(n) : \{1, 3, 3, \dots\}$) Δ で割って四捨五入

デジタル信号の実用的データ形式

(コンピュータやCDの内部で、デジタルデータは、 N 個の1と0の組み合わせ(2進数)で表現されている)

例) 語長 N が 16 (=16ビット) のデータ
= デジタルオーディオ(CDなどの)データ

0 1 0 0 1 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 0

2バイト整数形式 (short int) で

$\rightarrow -2^{15} \sim (2^{15}-1) \rightarrow -32768 \sim +32767$ を表現

その他) 8ビット(電話)、24ビット(高品質オーディオ)、ほか

クイズです

第1問

デジタル量は \longleftrightarrow アナログ量は
2進数 \longleftrightarrow 10進数
で表され、 \longleftrightarrow で表される

正しい(O) 誤り(x)

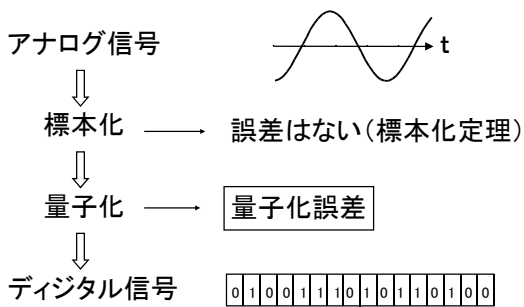
クイズです

第2問

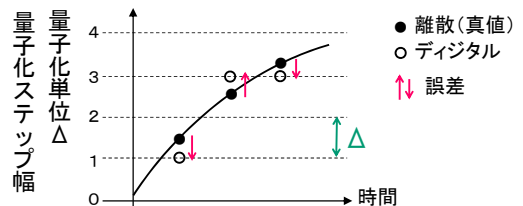
次の量のうち、デジタル量とみなしてもよいものに○を、みなせないものに×をつけよ。

- (1) 200
- (2) 0.13
- (3) 3/7

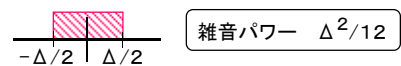
AD変換時の情報損失(誤差)



量子化誤差

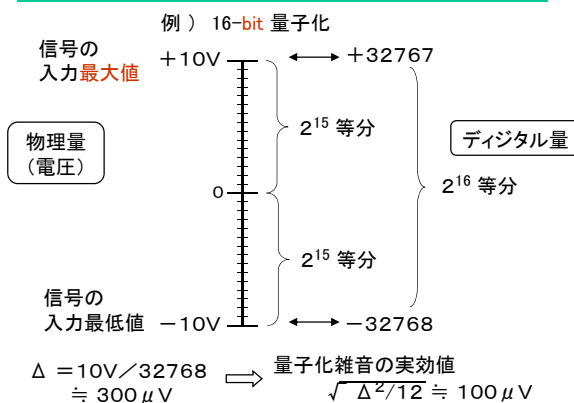


一般的な信号に対する量子化誤差はランダムな雑音
→ $-\Delta/2 \sim \Delta/2$ の間で一様分布 (**量子化雑音**)



→ 導出は付録

量子化単位 Δ と量子化雑音の具体例



量子化雑音とSN比

例) 16ビットデータで表される、最大振幅正弦波 $s(n)$
 $s(n) = 2^{15} \Delta \sin(\omega n)$ Δ : 量子化単位
 正弦波信号 $s(n)$ のパワーは (振幅の2乗の1/2)
 $P_s = (2^{15} \Delta)^2 / 2 = 2^{29} \Delta^2$

一方、量子化雑音のパワー $P_n = \Delta^2 / 12$

SN比 (P_s / P_n) は 約 98 dB

L ビットで最大振幅正弦波のSN比
 $\approx 6L + 2$ [dB]

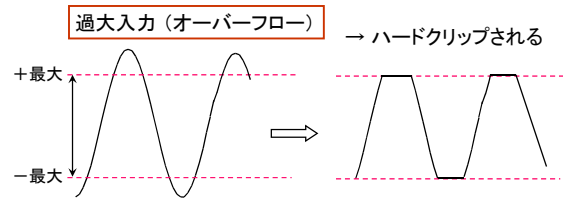
右下に、関連するテキストのページを表示します。

(p.69)

ビット数に関する補足

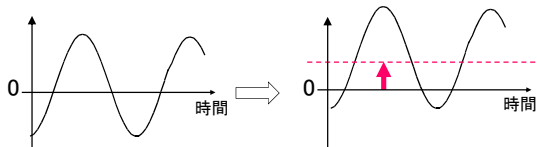
- ・ 16ビットでADしても、計算機内部での演算は24ビット、32ビット、と、ビット数を増したりまた、浮動小数点で行う。
(桁落ちや切り捨てなどの演算誤差の影響を軽減するため)

[A/D変換時の注意 1] 過大入力



- 処理結果に重大な影響 (よくやるミスの一つ)
⇒ 対策例: 測定結果をグラフ表示して、視覚で確認
- 最大値より小さな値でクリップされる場合もある!
(マイクアンプやPCのドライバなどで)

[A/D変換時の注意 2] 直流成分 (バイアス)



- 処理結果に重大な影響
- 例えば、
 - ・ 信号の2乗和をとってパワーを計算する場合
 - ・ 信号間の相関を計算する場合、など
(直流が測れる計測用ADなどで)

信号処理暗黙の前提

バイアス (直流成分) = ゼロ は、
信号処理の暗黙の前提
であることが多い



例えば、音も直流はゼロ

A/Dしたデータに信号処理を行う場合、
まず直流成分を除去しておくほうが無難
(平均値を全体から引く、などで)

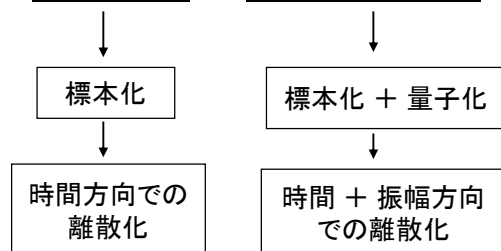
注) オーディオ用AD・DAの多くは直流除去フィルタが
装備されているが、それが、逆に困る場合もある。
(付録の文献[15])

[A/D変換時の注意 3] その他

録音時の確認

- ・ 測定前に背景雑音の録音と保存
騒音、電気雑音、聞こえない騒音 (超低周波)
- ・ 録音した信号の確認
波形、スペクトログラム、試聴、など
- ・ 多チャンネル時のチャンネル間校正

離散信号 と デジタル信号



(注意) 通常、
デジタル信号処理理論で扱うのは、
デジタル信号ではなく、離散信号

・ デジタル信号処理の理論解析は、通常
離散信号で行う。(暗黙の慣行) $x(n)$

整数では割り算の取り扱いが面倒なので
実数値の離散信号を使用

→ 厳密な本は「離散時間信号処理」と呼んでいる

ただし、多くの場合、
離散信号 \simeq デジタル信号 と見なせる

現実的には、

離散信号 = 真の信号値 + 測定誤差 (電氣的雑音など)
である。

一般には、量子化雑音 \ll 測定誤差であるので、

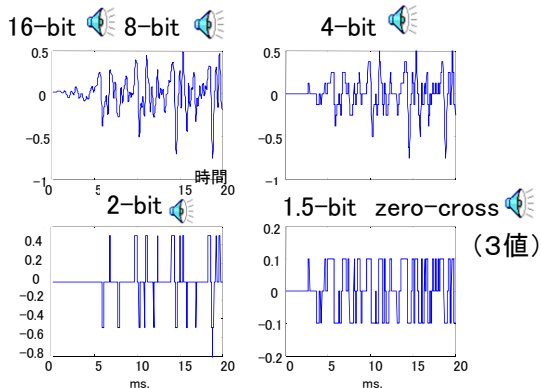
デジタル信号 \simeq 離散信号

例外) 有限語長演算の問題 (桁落ちなど)

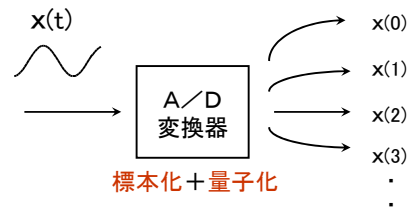
フィルタ設計への影響 (極・零位置の誤差)

☆ 本講習では、デジタル信号と離散信号の区別をしない

量子化雑音



A/D 変換 (まとめ)



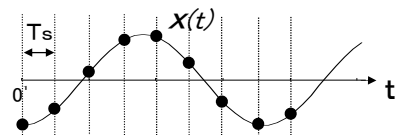
- ◇ 連続信号を入力すると(整数)数列を出力
- ◇ 信号処理の理論(説明)では、実数値数列(離散信号)を用いる = 量子化雑音を無視

○ 過大(過小)入力、直流成分、背景雑音などに気をつけよう

1. アナログ信号とデジタル信号

- ① A/D(アナログーデジタル)変換
- ② 標本化定理
- ③ D/A(デジタルーアナログ)変換
- ④ 最近のA/D, D/A 変換技術
- ⑤ 標本化定理再考
- ⑥ デジタル世界とアナログ世界

標本化周波数



T_s : 標本化周期
(または、サンプリング周期)

$1/T_s = f_s$: 標本化周波数
(または、サンプリング周波数)

1秒間のデータ数を表す

標本化定理 (サンプリング定理)

信号の帯域幅 f_{\max}
 通常は(以降は)、0 Hz からの場合を考慮するので、
 信号に含まれる最大周波数

標本化周波数 f_s

$$f_s > 2 \cdot f_{\max}$$

または

$$f_{\max} < f_s/2$$

この条件を満たせば、(理論的には)元の情報は失われない。(= 原信号を再現できる)

標本化定理 (周期で表せば)

$$f_{\max} < f_s/2$$



$$1/T_{\max} < 1/(T_s \cdot 2)$$

$$2 < \frac{T_{\max}}{T_s}$$

周期信号の1周期に2回以上、
 標本化すれば、元の情報は失わない。

標本化周波数の例

1) 電話

信号周波数の上限 $f_{\max} = 3.4 \text{ kHz}$

標本化周波数 $f_s = 8 \text{ kHz}$

$f_{\max} < f_s/2$ を満足

2) オーディオ

信号周波数の上限 $f_{\max} = 20 \text{ kHz}$

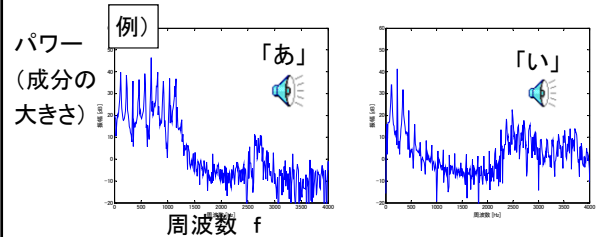
標本化周波数 $f_s = 44.1 \text{ kHz}, 48 \text{ kHz}$

$f_{\max} < f_s/2$ を満足

(p.10, 23)

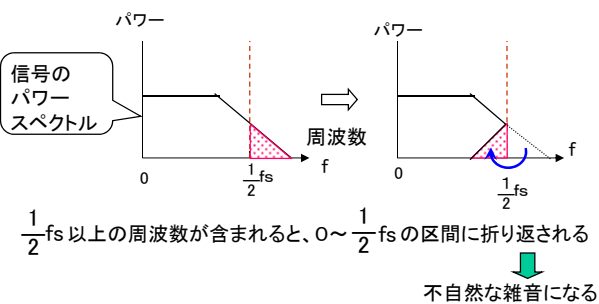
信号の パワースペクトル

信号が、どのような周波数成分を
 どの程度含んでいるか、を表す図

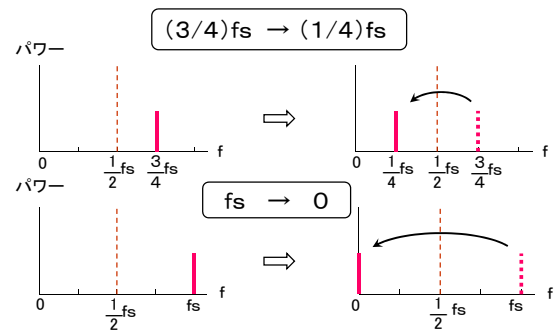


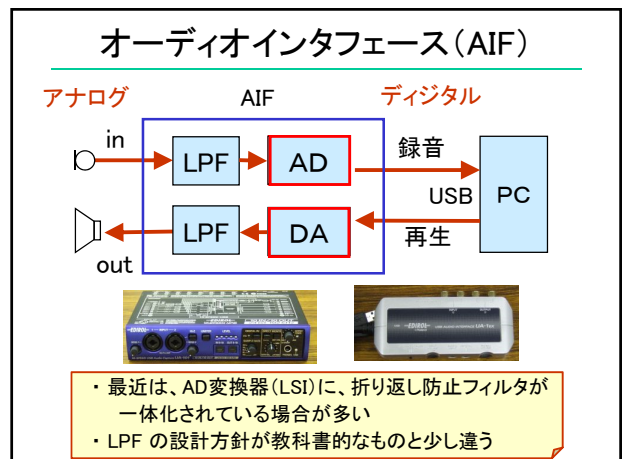
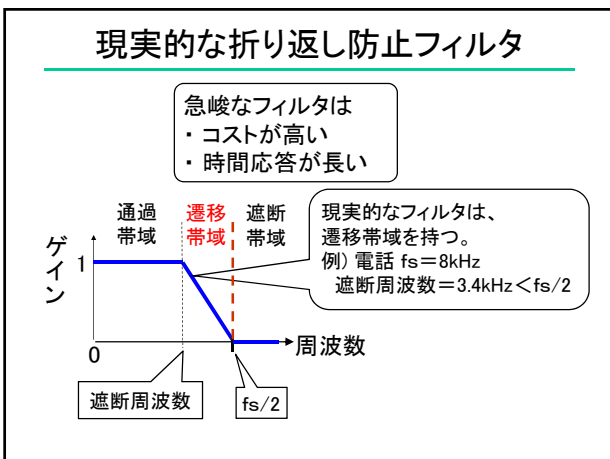
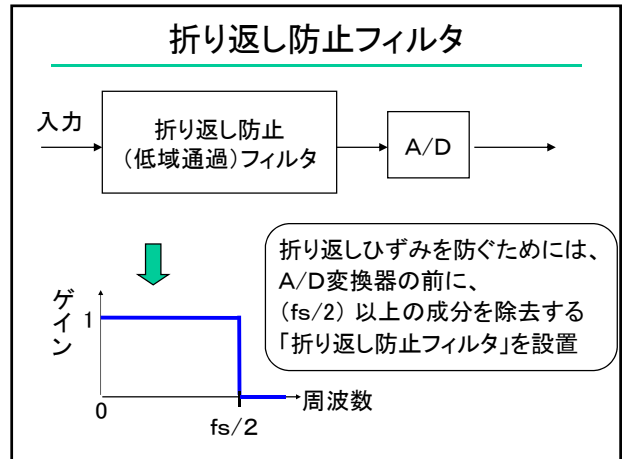
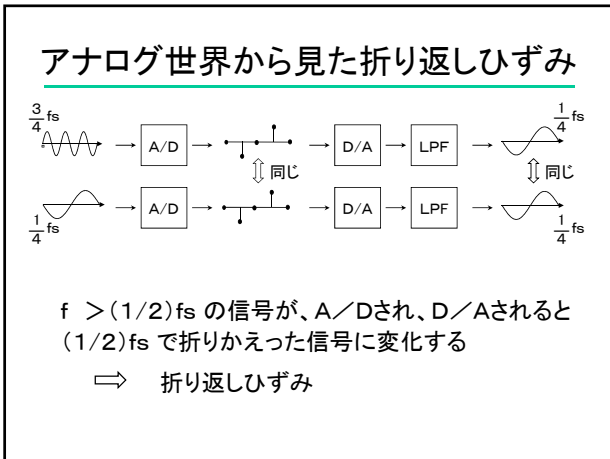
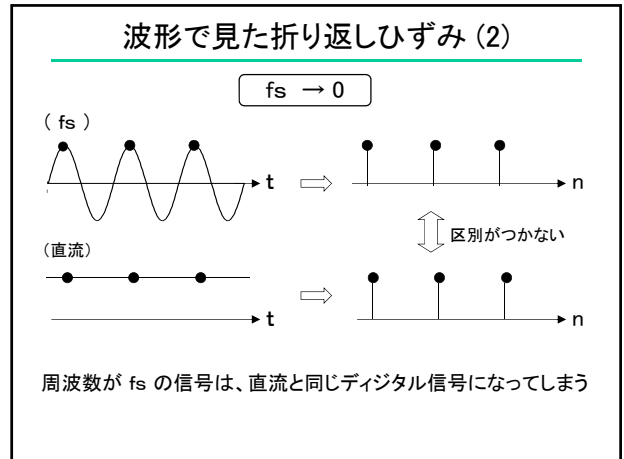
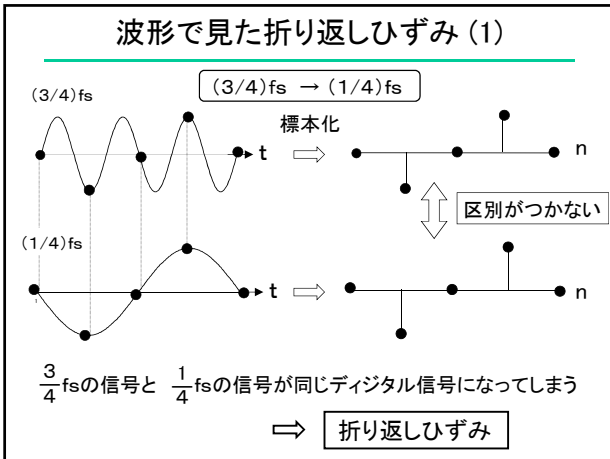
標本化定理が満たされないと

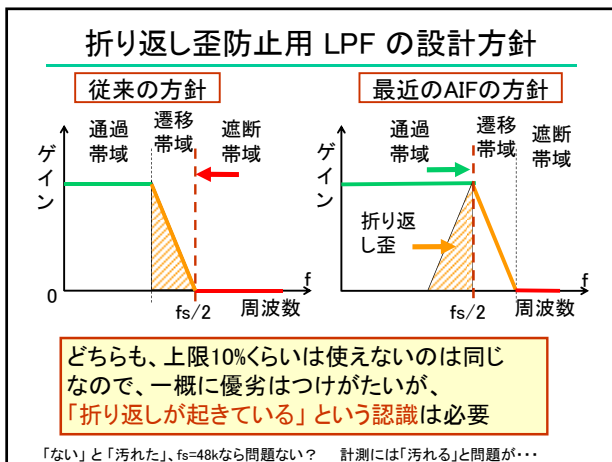
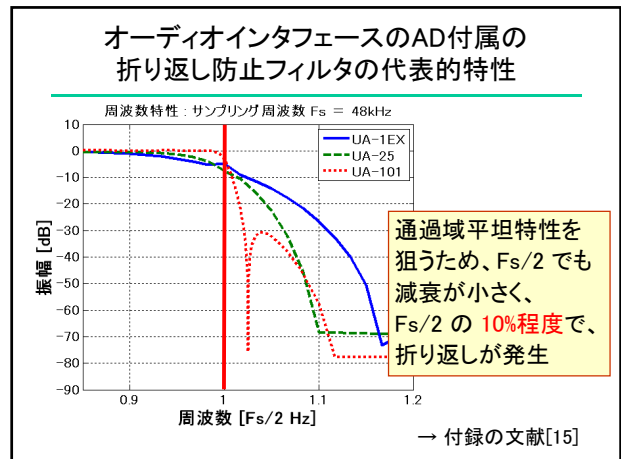
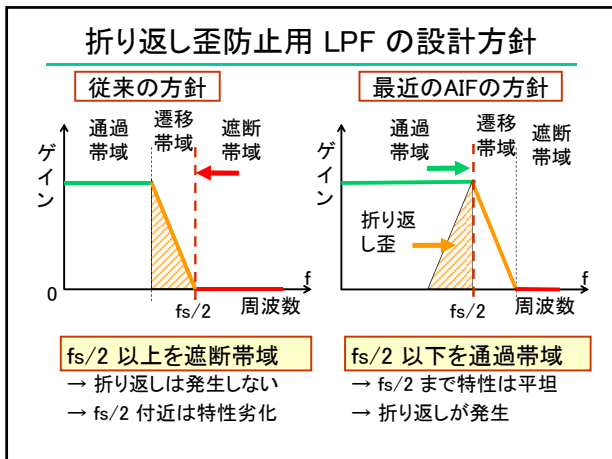
⇒ 折り返し歪み(エイリアシング)が発生



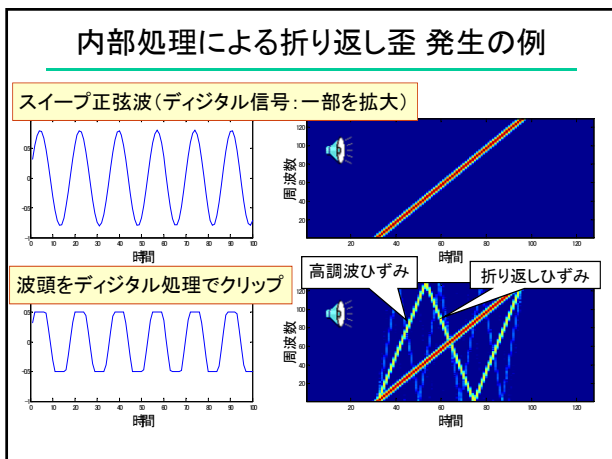
折り返しひずみの例







- ### 折り返し歪発生原因
- ◇ 入口 (ここまでの話)
AD時の帯域オーバー
 - ◇ デジタル演算処理 !
非線形処理による高調波成分の発生 → 後述 (具体的には、デジタル信号同士の乗算、波形の非線形処理、など)
- 入口(AD時)だけではなく、デジタル化後の演算でも「折り返し」が発生する

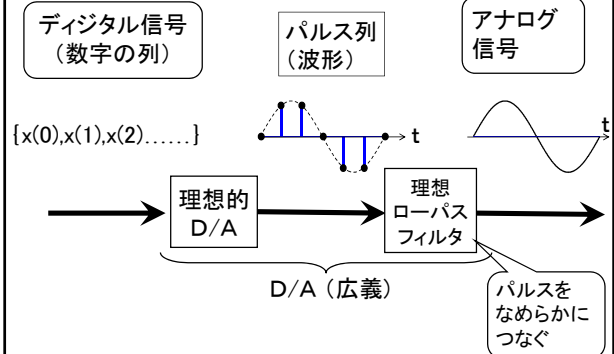


- ### 標本化定理と折り返しひずみ (まとめ)
- $f_s > 2 \cdot f_{\text{max}}$
- が、A/D→D/A で原信号を復元するための必要十分条件(理論的には)。
- これ満たされないと **折り返しひずみ**が発生する
- ↳ 帯域外周波数のアナログ信号が 帯域内周波数のデジタル信号になってしまう現象
- ・ 折り返し誤差を許容するAD変換器の存在
 - ・ 内部処理によっても折り返し歪が発生

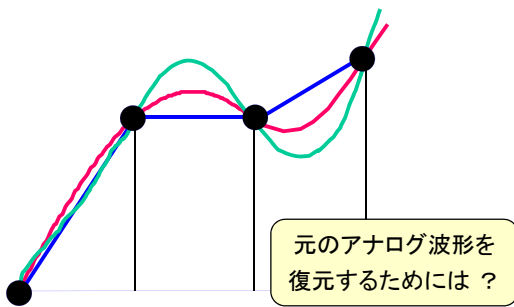
1. アナログ信号とデジタル信号

- ① A/D(アナログ→デジタル)変換
- ② 標本化定理
- ③ D/A(デジタル→アナログ)変換
- ④ 最近のA/D, D/A 変換技術
- ⑤ 標本化定理再考
- ⑥ デジタル世界とアナログ世界

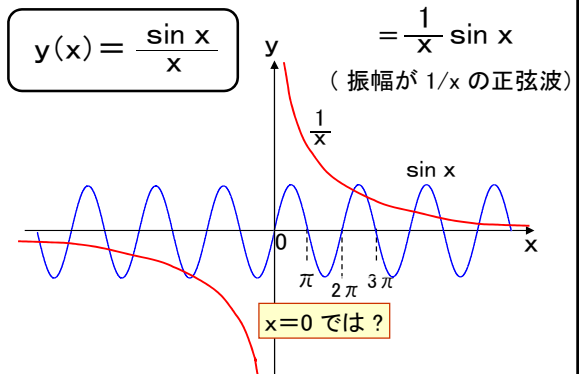
D/A変換の理論的しくみ



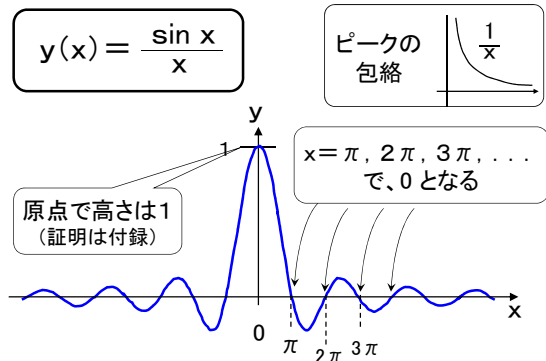
どうやって「なめらかに」つなぐ？



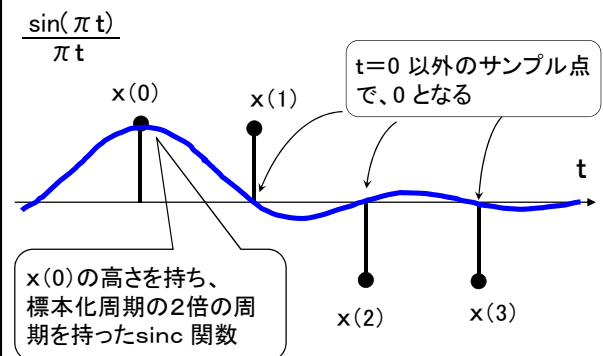
(予備知識) sinc 関数



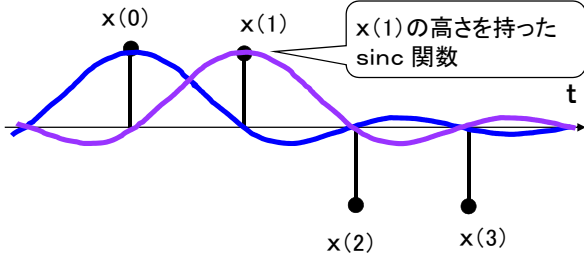
(予備知識) sinc 関数



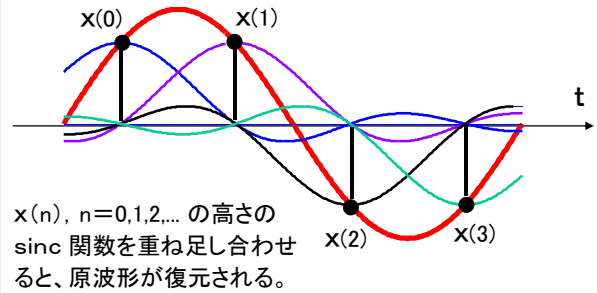
波形の復元(1)



波形の復元(2)



波形の復元(3)

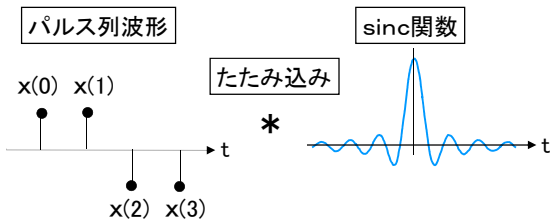


$x(n)$, $n=0,1,2,\dots$ の高さの sinc 関数を重ね足し合わせると、原波形が復元される。

⇒ sinc 関数による「補間(内挿)」

(p.53)

波形復元の数学的表現

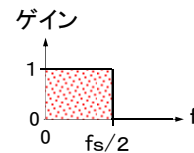


波形の復元(補間)は、パルス列波形と sinc関数との たたみ込み

補間の周波数動作

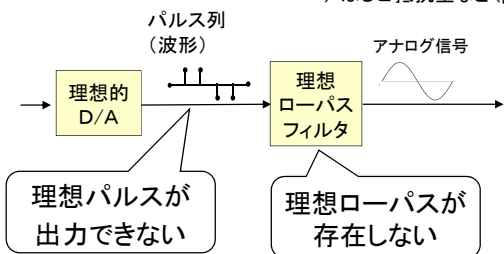
◇ sinc関数による補間(sinc関数によるたたみ込み) = 理想ローパスフィルタの動作

◇ 理想ローパスフィルタとは、
 $0 \sim (f_s/2)$ の周波数 → ゲイン 1 (通過)
 $(f_s/2)$ 以上の周波数 → ゲイン 0 (阻止)



従来型のD/A変換器*の問題点

*はしご抵抗型など(p.75)



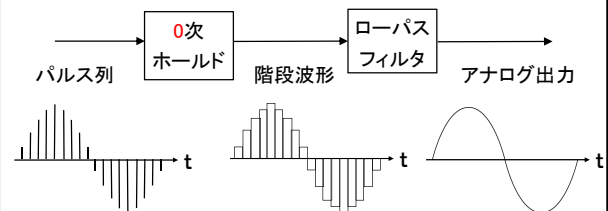
理想パルスが出力できない

・ アパーチャ効果 (保持効果)
(p.54)

理想ローパスが存在しない

・ $f_s/2$ 付近の特性の乱れ

0次ホールドの利用(従来型)



有限高さのパルスではエネルギーが小さいので、0次ホールドを行ってエネルギー(面積)を上昇

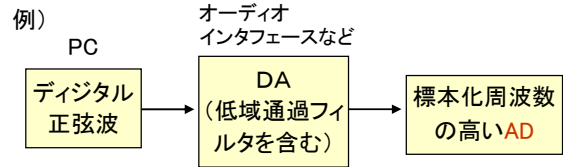
最近の変換器では

- ◇ 最近の変換器（オーバサンプリング、 $\Sigma\Delta$ ）では特性が改善された。
（理想パルス+理想ローパスフィルタをデジタルフィルタで近似実現したため）



DAとフィルタは一体化されたので、フィルタを意識しなくても良く場合が多い。

しかし、使用するDAは、一度、特性をチェックしておいたほうがよい



- ◇ 特に $f_s/2$ 付近の周波数特性
- ◇ 振幅に対する非線形性（クリッピングなど）（後述）

オーディオインタフェースのDA付属のローパスフィルタの代表的特性

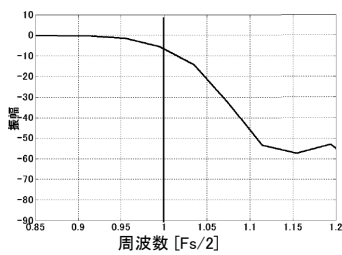


図 11 UA-1EX の DA 系 LPF の振幅特性

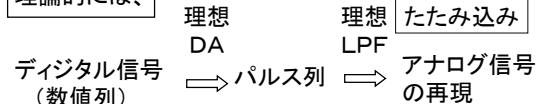
ADのフィルタと同様に、通過域平坦特性を狙うため、 $F_s/2$ でも減衰が小さく、 $F_s/2$ の10%程度で、**逆折り返し**（ $F_s/2$ 以上の成分）が発生

0.95 ($* f_s/2$) を出力すると
1.05 ($* f_s/2$) も出力される

→ 付録の文献[15]

DA変換（まとめ）

理論的には、



現実的には、

- ・ $f_s/2$ 付近の特性の乱れや「逆折り返し」が発生。
- ・ 特性をチェックしてから利用することが望ましい。

1. アナログ信号とデジタル信号

- ① A/D(アナログ→デジタル)変換
- ② 標本化定理
- ③ D/A(デジタル→アナログ)変換
- ④ 最近のA/D, D/A変換技術
- ⑤ 標本化定理再考
- ⑥ デジタル世界とアナログ世界

最近のA/D, D/A変換技術

- 1) オーバサンプリング方式
- 2) $\Sigma\Delta$ 方式 (= $\Delta\Sigma$ 方式)
(1ビット A/D, D/A)

1) オーバサンプリング方式

信号が含む上限周波数を f_m 、
標本化周波数を f_s とする。

◇ 基本方式: $f_s = 2 \cdot f_m$

◇ オーバサンプリング方式:

$$f_s = 2 \cdot f_m \times N$$

($N: 2$ 以上の整数)

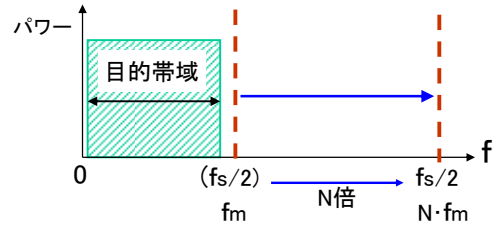
厳密には、上限周波数は f_m より少し小さい

サンプリング定理で必要とされる周波数を
上回る周波数でサンプリング

(p.57)

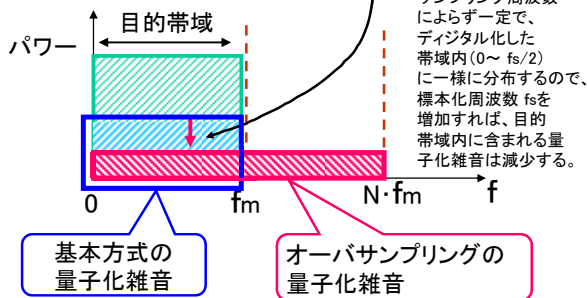
オーバサンプリングの効果

標本化周波数 f_s が大きくなると、
デジタル化できる周波数帯域 $f_s/2$ が増加。



利点 その1

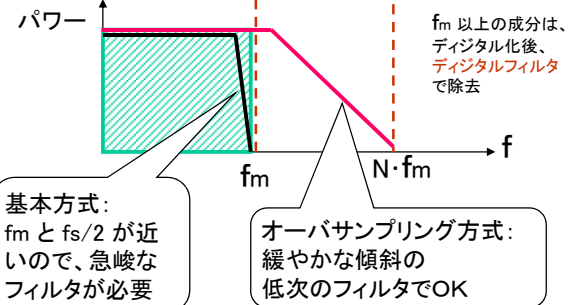
目的帯域内の量子化雑音が減少



(p.71)

利点 その2

AD, DA用のアナログ・ローパスフィルタは
低次のものでよい → 低コスト

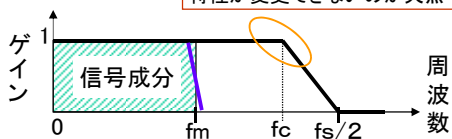


利点 その3

ローパスフィルタの悪影響が改善

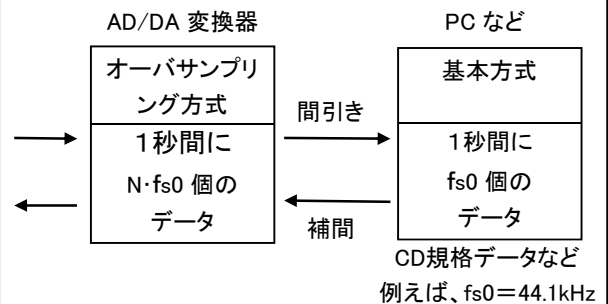
f_m 以上の帯域をカットするローパスフィルタは、
特性の良いデジタルフィルタが利用できる。

内蔵型の場合、
特性が変更できないのが欠点



オーバサンプリング周波数の例
20kまでの信号 → $f_s = 48k$ → 192kHz

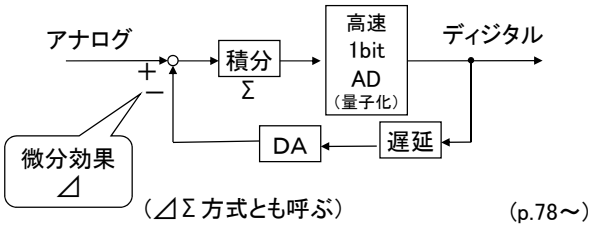
基本方式との受け渡し



(p.79)

2) $\Sigma \Delta$ 方式 (1ビット方式)

- 1) MHz 以上もの 高速オーバーサンプリング
- 2) 微分効果で量子化雑音を大幅に低減
- 3) A/D (量子化器)は 簡単な 1ビット



量子化の表現

◇ 量子化の例:

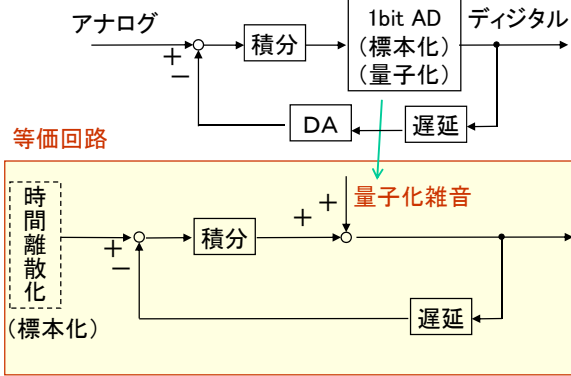
$$\left. \begin{array}{l} 3.43 \rightarrow 3 \\ 3.88 \rightarrow 4 \end{array} \right\} \text{(四捨五入)}$$

◇ 量子化雑音を加算しても整数になる

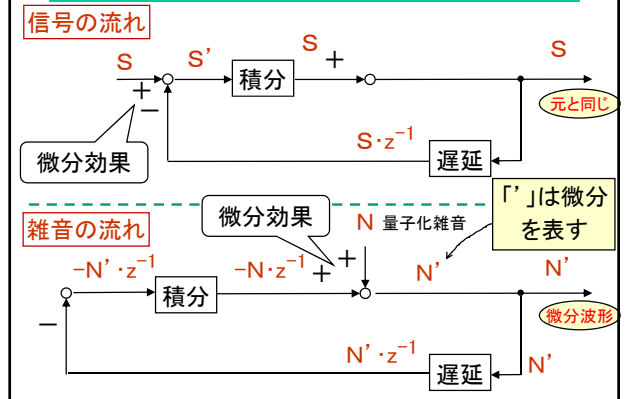
$$\begin{array}{l} 3.43 + (-0.43) \rightarrow 3 \\ 3.88 + (0.12) \rightarrow 4 \end{array}$$

◇ 量子化の操作 = 量子化雑音の付加と考えることができる

等価回路

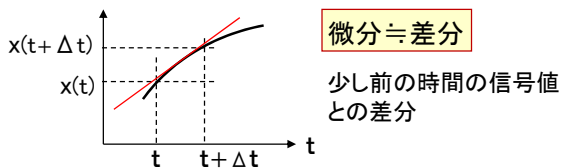


量子化雑音が微分される



微分

$$\frac{d}{dt} x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$



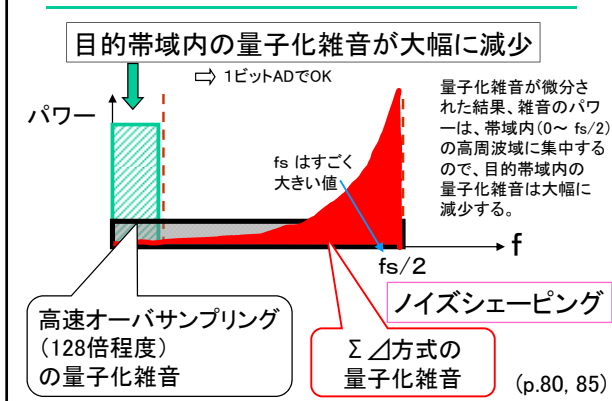
微分の効果

・ 微分(差分)は高周波域強調 (低周波域抑圧)

$$\frac{d}{dt} \sin \omega t = \omega \cos \omega t \quad \text{微分結果は } \omega \text{ に比例}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \sin \omega t = \omega^2 (-\sin \omega t) \quad \omega^2 \text{ に比例}$$

量子化雑音微分の有効性



Σ Δ方式の画期的な点

- ◇ 変換器が1ビットでできるため、
高精度・低雑音のAD, DAを、
安く・小さく実現できる(実用的観点)
- ◇ 振幅方向ではなく、時間方向での分解能向上
(=サンプリング周波数向上)で
量子化雑音を低減できる(理論的観点)

※ ただし、A/D 変換器の出力やデータ保存の形式は
16ビット(現在の標準的データフォーマット)
に変換されて出力・保存される場合が多い。

1. アナログ信号とデジタル信号

- ① A/D(アナログ→デジタル)変換
- ② 標本化定理
- ③ D/A(デジタル→アナログ)変換
- ④ 最近のA/D, D/A変換技術
- ⑤ 標本化定理再考
- ⑥ デジタル世界とアナログ世界

デジタル信号とグラフ化

デジタル信号は数列

$$\{x(0), x(1), x(2), x(3), x(4), \dots\}$$

例えば、

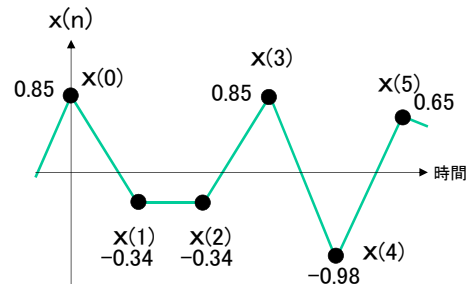
$$\{0.85, -0.34, -0.34, 0.85, -0.98, 0.65, \dots\}$$

である。

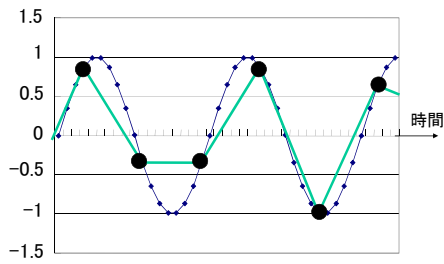
しかし、これでは、直観的にわかりにくいので、
グラフ化して視覚化することが多い。

元のアナログ信号はどんな信号？

通常のPCでのグラフ化は、デジタル信号(数列)を直線で結ぶ

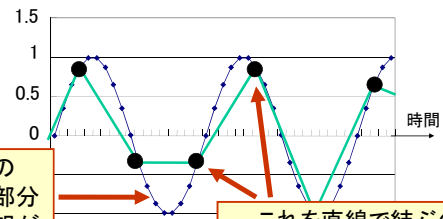


元のアナログ信号は正弦波



- ◆ 1周期に 18回の標本化
- 1周期に 2.6回の標本化 (>2回)

標本化周波数



波形の
先端部分
の情報が
失われる

これを直線で結ぶのは
誤った情報を与える恐れ有り

だから、標本化周波数は、もっと大きくして
細かく、たくさん標本点をとったほうが良い？

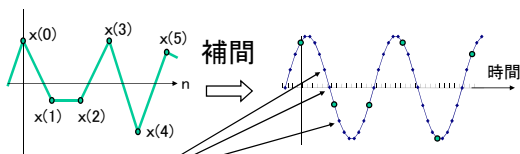
標本化定理再考(その1)

- ◇ 標本化周波数 f_s は大きければ大きいほど、より正確な情報が得られる？
- ◇ 答は (とりあえず) NO。
なぜなら、標本化定理を満たす標本化周波数は、完全な情報が得られる(情報のロスなし)、と習った、はず。
- ◇ グラフが視覚的にわかりにくいのは、標本化定理が、グラフの質を保証するものではないから

グラフ化とは

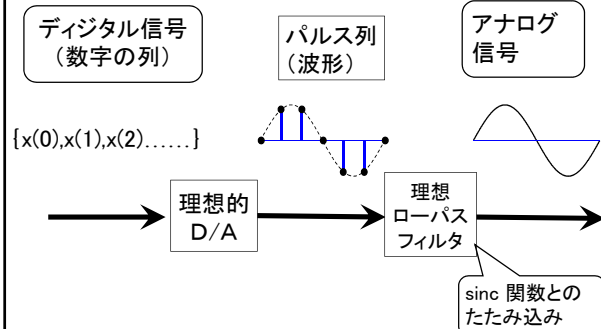
- ◇ グラフ化とは、デジタル信号(数列)を、擬似的なアナログ信号として表示して、視覚的な理解を得ようとするのが目的
- ◇ 本来のアナログ波形に近い表示を行うためには、表示の前に、DAの原理に基づいた、擬似的なアナログ化の計算が必要
→ 補間

補間



- ・ 離散時間の間の値を計算により求め、標本化周波数を上げて、アナログ信号に近づける
- ・ 「内挿」「Interpolation」「アップサンプリング」とも言う
- ・ 標本化周波数の増加率に応じて、N倍の補間(アップサンプリング)、と言う

D/A変換の原理(再掲)



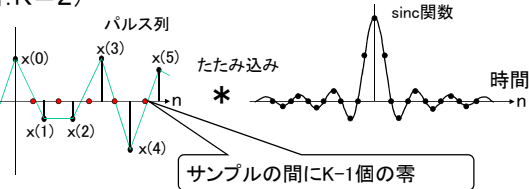
補間(内挿)の方法

◇ アップサンプルしたパルスとsinc関数をたたみ込む
(理想LPFによるD→Aの補間のシミュレーション)

例) K倍の補間のためのsinc関数

$$\sin(\pi n/K) / (\pi n/K)$$

(例: K=2)



標本化定理 再考(その2)

◇ 補間によって

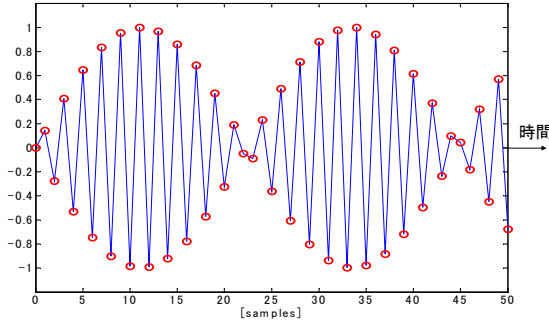
全ての離散信号は元のアナログ信号に
正確に戻るはず、だが？

→ 補間を行うための注意事項

fs/2 近くの正弦波のプロット

サンプル値(○)を結ぶと、「うなり」のように見える。

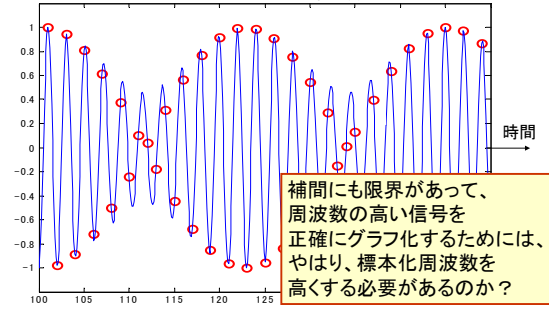
f = 3821 Hz の正弦波のプロット, Fs = 8000 Hz



補間(10倍)をしてみた

若干の補間効果はあるが、「うなり波」のまま

10倍で補間 `zz = resample(yy, 10, 1)` (MATLAB)



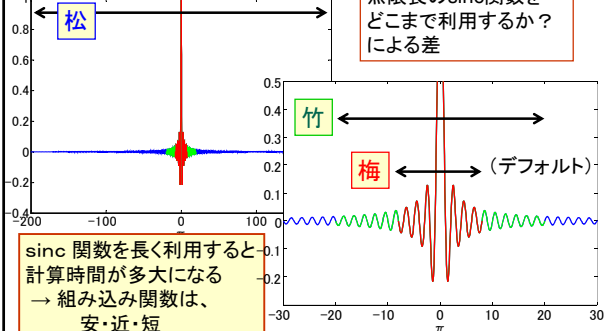
補間にも限界があって、
周波数の高い信号を
正確にグラフ化するためには、
やはり、標本化周波数を
高くする必要があるのか？

問題は補間の品質

補間には品質があるので注意

`zz = resample(yy, 10, 1)`

無限長のsinc関数を
どこまで利用するか？
による差



sinc 関数を長く利用すると
計算時間が多大になる
→ 組み込み関数は、
安・近・短

組み込み関数の利用に当たって

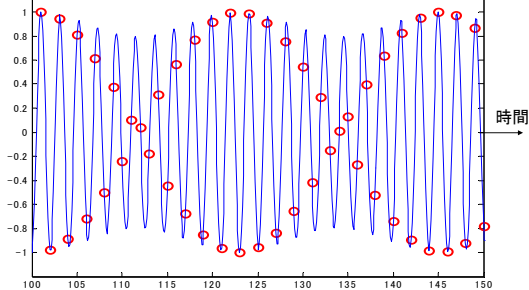
- ◇ 安易に組み込み関数を利用して良しとしない
- ◇ 理想的には、内容を理解して使う
- ◇ 最低限、ヘルプを見て、パラメータを確認しておくことが望ましい。
(私の反省です)
- ◇ 組み込み関数よりは自作のほうが
安心な場合もある (⇔ 欠点は速度)

※ 有限長の sinc 関数には、窓 (Hanning など) をかけてから
補間するのも有効

少し品質の高い補間を試みた(竹)

まだ「うなり波」のように見える

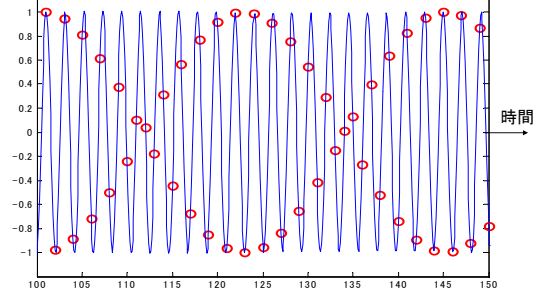
sinc 関数を片側 10周期に。10倍で補間 `zz = resample(yy,10,1,20)`



念入りな補間(松)

ほぼ一定振幅の正弦波に「見える」ようになった。

sinc 関数を片側 100周期に。10倍で補間 `zz = resample(yy,10,1,200)`



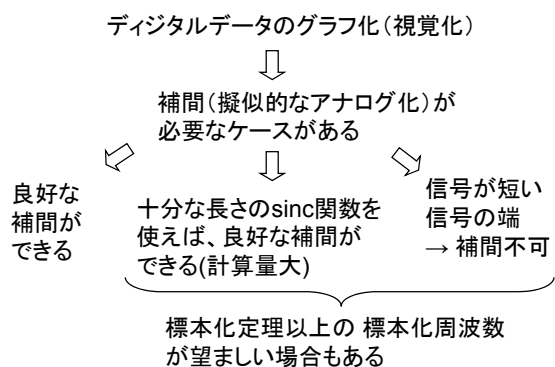
標本化定理 再考(その3)

- ◇ 毎回「松」では計算が大変そうだが、
→ 大事なところでは念入りに補間すべき
- ◇ 勘違いや補間の手間を避けたい場合などには
いっそ高い周波数で標本化したほうが
楽な場合もありそう。

標本化定理 再考(その4)

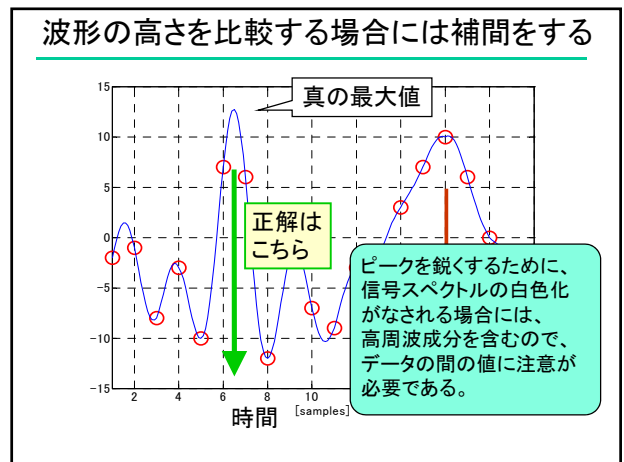
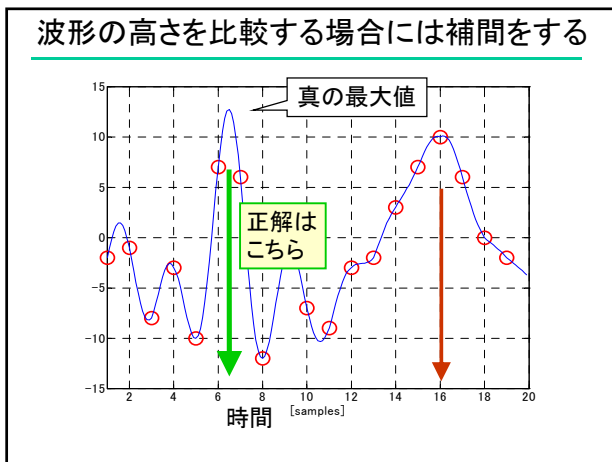
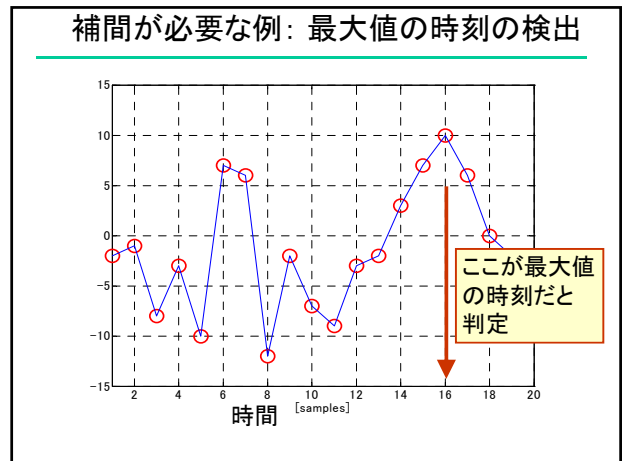
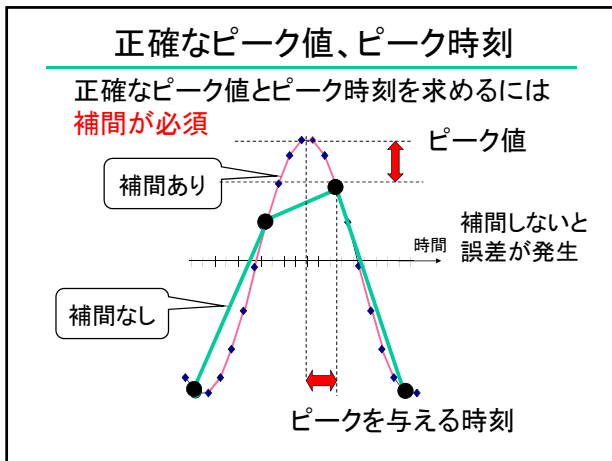
- ◇ 元のアナログ信号を、デジタル信号から近似的に
「復元」するためには、補間が必要、だが、
- ◇ 補間するには、
左右にある程度のデータ数
(sinc 関数長程度)が、必要。
⇒ 「少数のデータ」や、「信号の端付近」は、補間不良
⇒ 「少数のデータ」や、「信号の端付近」には、
標本化定理は成立しないので、
これらを正確に表示するためには、
標本化周波数を、標本化定理より上げる必要がある。

デジタルデータのグラフ化(まとめ)



グラフ化以外にも補間が必要な例

- 1) 例えば、ADLしたデジタルデータ(数値)から
最大値を求める
↓
標本値の最大値は、
アナログデータとしての最大値ではない
- 2) 例えば、相関関数を計算して、
その最大値や最大値を与える時刻を求める
↓
補間なしでは、誤る場合もある



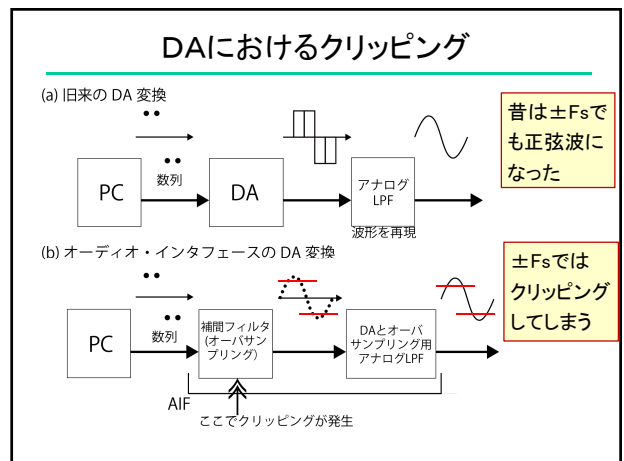
標本化定理 再考(まとめ)

標本化定理は、情報が欠落しないことを保証するだけ

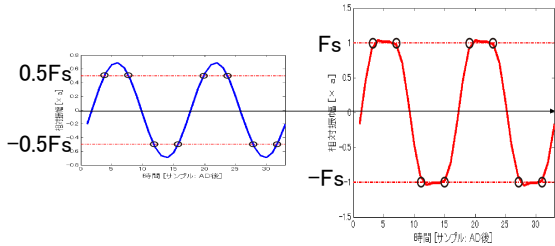
- デジタルデータのグラフ化
- 信号処理で最大値を求める場合 (コンピュータに探させる場合)

↓

補間や、または実測時において標本化周波数を上昇させた方が
良い場合がある



DAにおけるクリッピングの例



デジタルデータとしてはフルスケール以下でも、補間をしたらデジタルフルスケールを超える場合、DA出力がクリッピングされる場合がある。

DAに関する補足

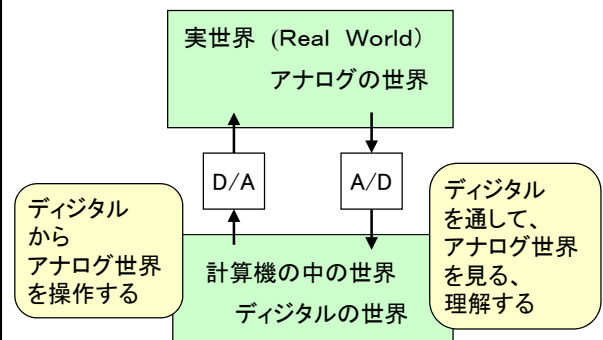
DAにおける品質劣化要因(p.11)

- ・ 逆折り返しひずみ
 - ③ DAの項で説明
- ・ クリッピングひずみ
 - 回避するためには、
 - デジタルデータをあらかじめ補間して
 - フルスケール値を越えないことを確認する
 - 付録の文献[16]

1. アナログ信号とデジタル信号

- ① A/D(アナログ→デジタル)変換
- ② 標本化定理
- ③ D/A(デジタル→アナログ)変換
- ④ 最近のA/D, D/A変換技術
- ⑤ 標本化定理再考
- ⑥ デジタル世界とアナログ世界

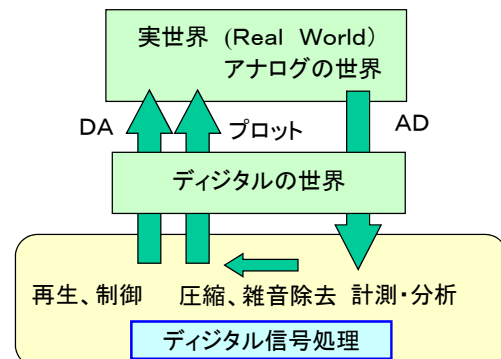
デジタル信号処理が扱う二つの世界



注意しなければいけない事柄

- ◇ 同じ信号が違って見える。
 - ・ デジタルをそのままプロットしたのでは、元のアナログ信号には見えない
 - ⇒ アナログに近づけた(補間した)表示が、(場合によっては)必要となる。
- ◇ 演算処理、分析手法などにも注意
 - ・ 違っていても同じもの(同じ処理)
 - ・ 似ているようで違うもの(違う処理)
 を理解しておく。

アナログ世界とデジタル世界(まとめ)



2. 時間領域と周波数領域

- ① フーリエ変換 (アナログ)
 - ・ 時間と周波数を関係付ける変換
主要な性質を復習 (証明抜)
 - デジタルも類似なので
- ② 関数の直交変換 (講習省略)
- ③ デジタル信号の周波数変換
- ④ 窓関数

フーリエ変換

時間信号 (アナログ) 周波数スペクトル

$$x(t) \xrightarrow{\text{フーリエ変換}} X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

注) $e^{-j2\pi ft} (= e^{-j\omega t})$
 $= \cos(2\pi ft) - j \cdot \sin(2\pi ft)$

は「正弦波」(複素正弦波)

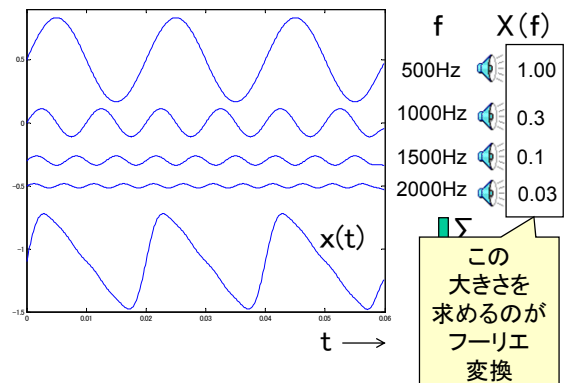
フーリエ変換の主張点

全ての信号は、
いろいろな周波数の正弦波の和

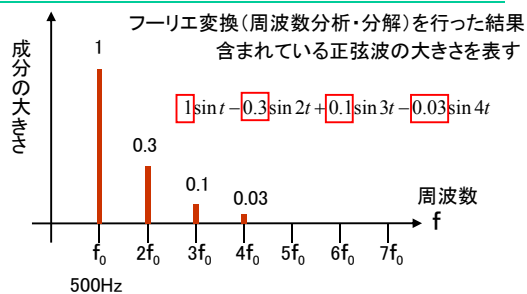
に **分解** できる
 によって **合成** できる

例) $x(t) = \sin(\omega t) + 1/3 \cdot \sin(3\omega t)$
 $+ 1/5 \cdot \sin(5\omega t) + 1/7 \cdot \sin(7\omega t)$
 $+ \dots$

信号の分解・合成 (例1)

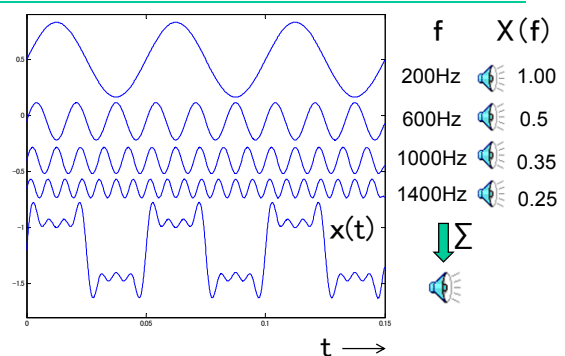


周波数スペクトルの図



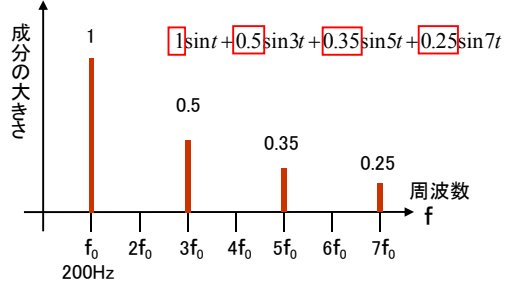
注) これは振幅スペクトル

信号の分解・合成 (例2)

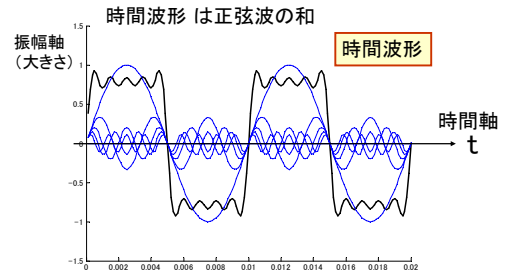


周波数スペクトルの図

フーリエ変換(周波数分析・分解)を行った結果
含まれている正弦波の大きさを表す



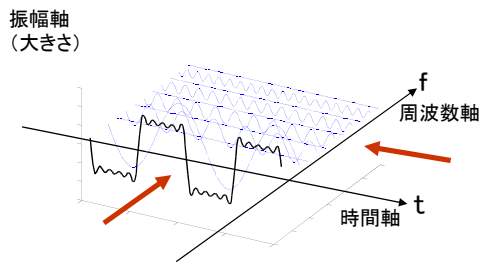
時間波形とフーリエ変換のイメージ



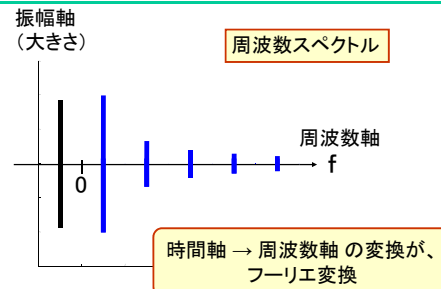
周波数領域への変換は直交変換

fourier_002.m

時間軸と周波数軸



波形を、周波数軸で見ると



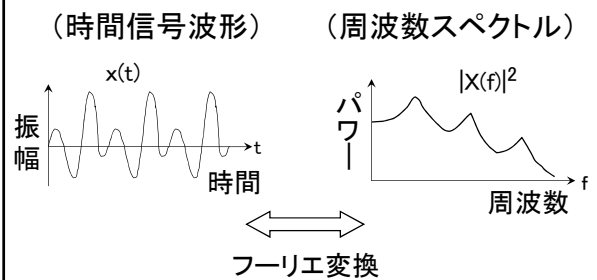
フーリエ変換結果の図示に対して(補足)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

- ◇ フーリエ変換結果 $X(f)$ は複素数。
- ◇ 各周波数成分の振幅(大きさ)は $|X(f)|$
- ◇ 各周波数成分の位相は、偏角 $\arg(X(f))$

フーリエ変換結果 $X(f)$ は、
視覚的にわかりやすい $|X(f)|^2$ (パワース
ペクトル)を dB値で図示することが多い

時間信号とスペクトル



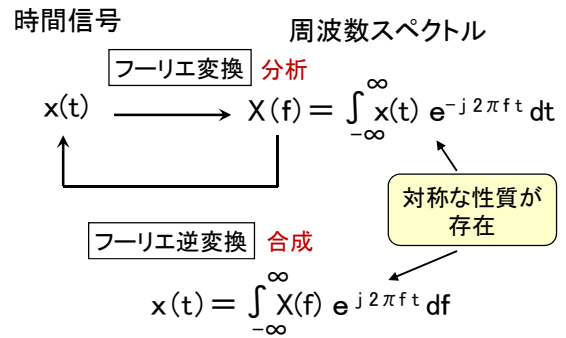
時間信号とスペクトルとの関係

- ◇ 時間信号とスペクトルは、一つの信号の表裏の関係をなす。
- ◇ 時間領域表現(時間信号)と周波数領域表現(スペクトル)とのうち場合に依じて、見やすい(理解しやすい)領域で信号処理理論が展開される

⇒ 時間信号とスペクトルの対応関係の把握は重要

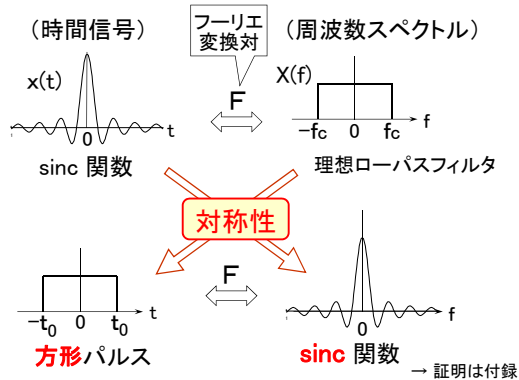
(注)この項はアナログの話です。ただし、類似の対応関係がデジタルにも成立します。

フーリエ変換と逆変換

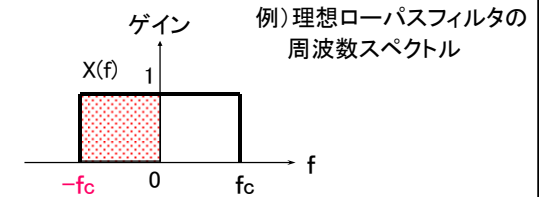


(p.35)

代表的なフーリエ変換対(1) 方形 ↔ sinc



補足: 負の周波数

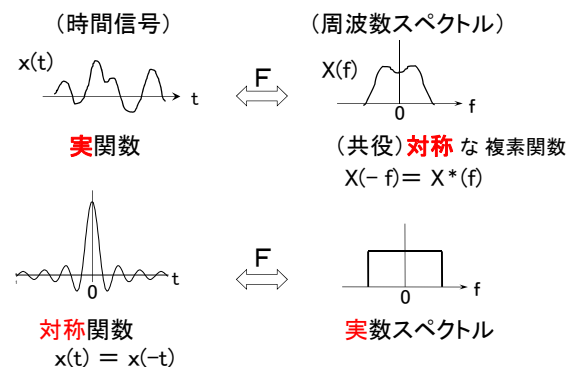


実時間信号のスペクトルを考える時には、正の周波数(0 ~)を考えれば十分であるが、時間領域との対称性を見るために、負の周波数に対する $X(f)$ の値も表している

補足の補足: 負の周波数

- ・ 複素正弦波で考えれば $e^{j2\pi ft} \Rightarrow e^{-j2\pi ft}$
複素平面の単位円上を逆周り
- ・ \sin で考えれば、周波数が f の正弦波 $\sin 2\pi ft$
に対して、周波数が $-f$ の正弦波は、 $\sin 2\pi(-f)t (= -\sin 2\pi ft)$
正負が逆なだけ。 周期(周波数)は同じ

フーリエ変換対(2) 実 ↔ (共役)対称



フーリエ変換対(3) 離散 ↔ 周期

(時間信号) $x(t)$ \xleftrightarrow{F} (周波数スペクトル) $X(f)$

周期信号 \leftrightarrow 離散(線)スペクトル (調波構造)

離散(時間)信号 \xleftrightarrow{F} 周期スペクトル

厳密には 離散的信号

周期信号が倍周波数しか含まない理由 (フーリエ級数の原理)

周期信号 $x(t)$ with period T_s

基本周波数 $f_0 = 1/T_s$ の整数倍の正弦波は T_s が周期となっている

非整数倍の正弦波は T_s が周期とならない \Rightarrow 含まれない

Examples: $f_0 = 1/T_s$, $2f_0 = 2/T_s$, $3f_0 = 3/T_s$, $2.3f_0$

離散 ↔ 周期の例

周期信号 (音声構造・調波構造) \leftrightarrow 離散(線)スペクトル (倍音構造・調波構造)

フーリエ変換対(4) 等パルス列 ↔ 等パルス列

(時間信号) $x(t)$ \xleftrightarrow{F} (周波数スペクトル) $X(f)$

等間隔・等振幅パルス列 \leftrightarrow 等間隔・等振幅線スペクトル列 (パルス列)

☆ パルス間隔は逆数の関係

演算の関係 たたみ込み ↔ 乗算

(時間信号) $y(t) = \int x(t-u)h(u) du = x(t) * h(t)$ \leftrightarrow (周波数スペクトル) $Y(f) = X(f) \cdot H(f)$

たたみ込み \leftrightarrow 乗算 (フィルタリング)

対称性

$y(t) = x(t) \cdot h(t) \leftrightarrow$ 周波数軸上の たたみ込み

乗算 (窓掛け、振幅変調)

例) 理想ローパスフィルタ

周波数で表すと: $X(f) \times$ 乗算 \times 方形 \rightarrow 結果

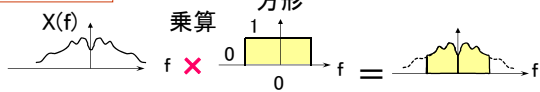
時間で表すと: $x(t) *$ たたみ込み $*$ sinc \rightarrow 結果

理想ローパスフィルタは、sinc関数のたたみ込み

$\rightarrow x(t)$ がパルス列の時は、補間の操作になる

周波数領域表現が便利な理由

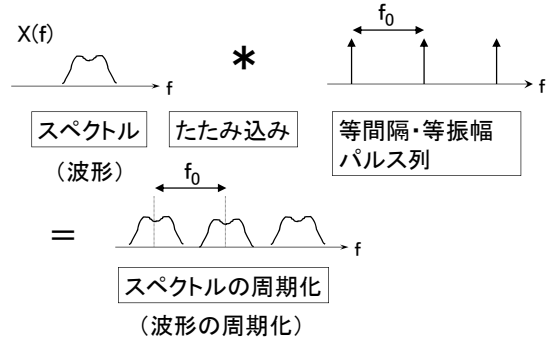
周波数で表すと



入力スペクトル \times フィルタ特性 = 出力スペクトル

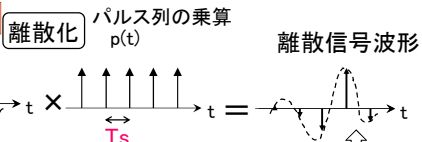
入出力関係が、乗算で表される！

等間隔・等振幅パルス列のたたみ込み → 周期性

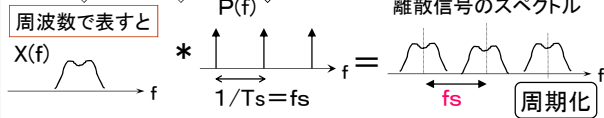


離散化(標本化)した信号のスペクトル

時間で表すと

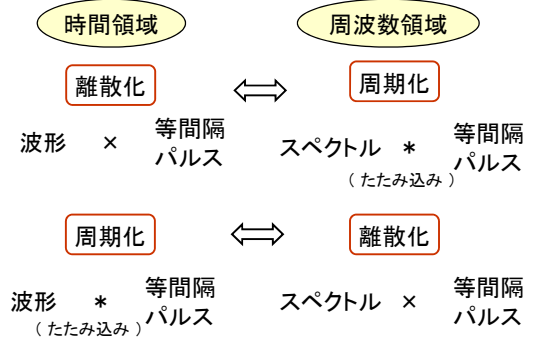


周波数で表すと

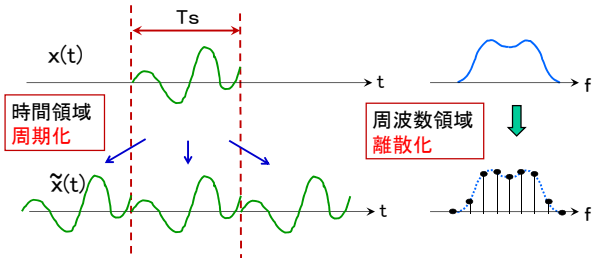


周期 T_s で時間離散化 $\rightarrow f_s (=1/T_s)$ でスペクトルは周期性

離散化 \leftrightarrow 周期性

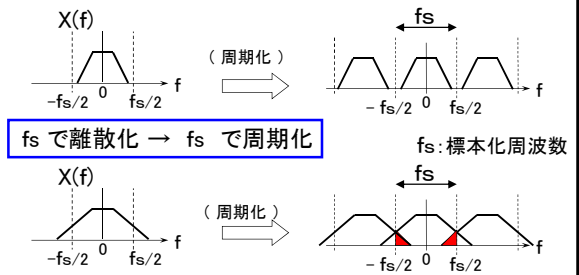


周期性 \Rightarrow 離散化 の解釈



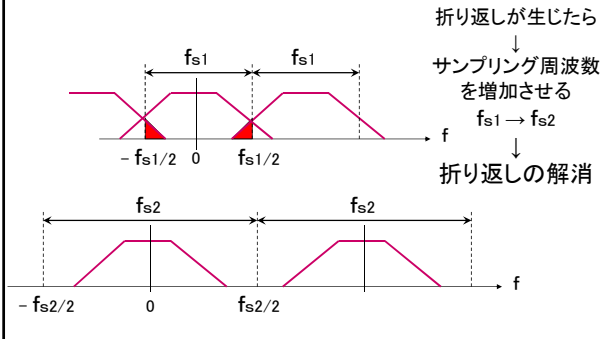
フーリエ級数の原理より、信号を周期性すると、周波数スペクトルは、基本周波数 f_0 の整数倍の周波数のみ値を持つようになる

信号の離散化によるスペクトルの周期性と標本化定理



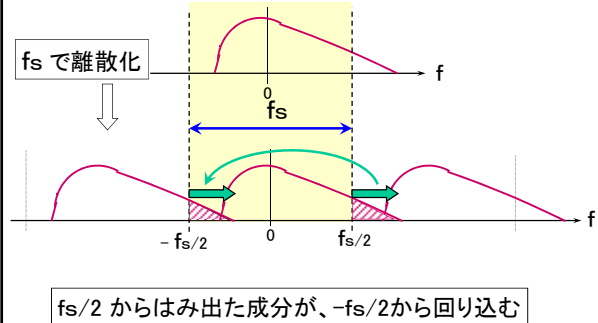
$f_s/2$ を越えた $X(f)$ の成分はスペクトルが重なる。
→ 「折り返される」ように見える → 「折り返しはずみ」

折り返しの解消



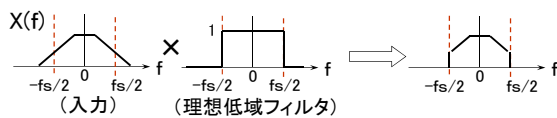
折り返しというより、「回り込み」

非対称なスペクトルの場合を考える

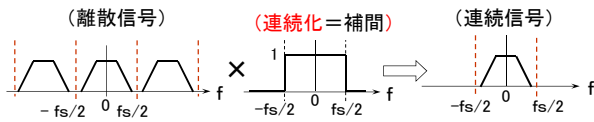


A/Dの前、D/Aの後の理想低域フィルタの働き

A/Dの前: $f_s/2$ を越えた $X(f)$ の成分を除去

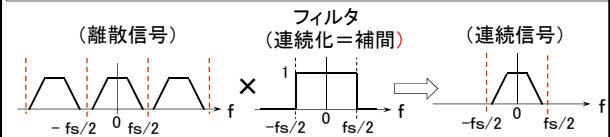


D/Aの後: 離散信号に含まれる $f_s/2$ 以上の成分を除去

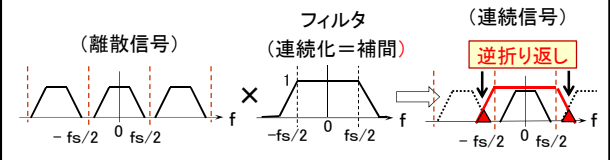


D/Aの逆折り返し

正しいDA: フィルタが離散信号に含まれる $f_s/2$ 以上の成分を除去



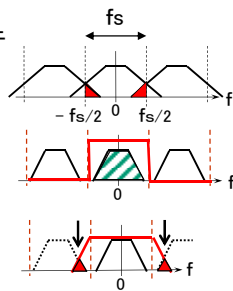
逆折り返し起きる場合: $f_s/2$ 以上の成分を除去しきれない



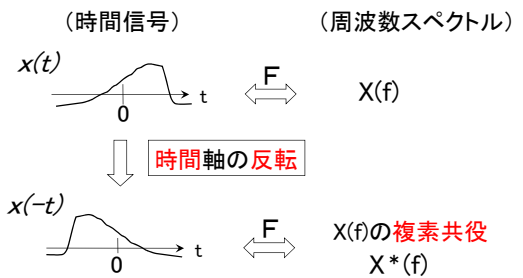
離散信号 ⇔ 周期スペクトル

離散信号 ⇔ 周期スペクトル (周期は f_s) の関係から、次のことがわかった。

- 折り返し誤差の発生と回避条件
- デジタル ⇒ アナログの方法
ローパス
sinc関数のたたみ込み
- 逆折り返しの発生原理



時間軸の反転



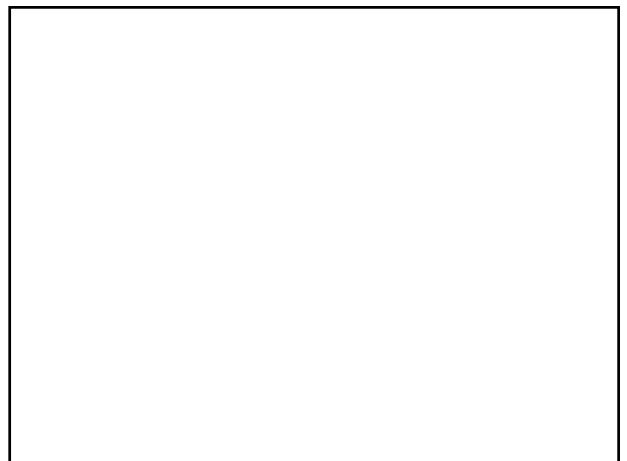
$$X(f) = \int x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

フーリエ変換対のまとめ

方形 \longleftrightarrow sinc
実 \longleftrightarrow 対称
離散 \longleftrightarrow 周期
等パルス列 \longleftrightarrow 等パルス列

演算操作の関係

たたみこみ演算 \longleftrightarrow 乗算
離散化 \longleftrightarrow 周期化
連続化 (sinc 関数の畳み込み) \longleftrightarrow 方形窓の乗算 (一周期の切り出し)
軸反転 \longleftrightarrow 複素共役



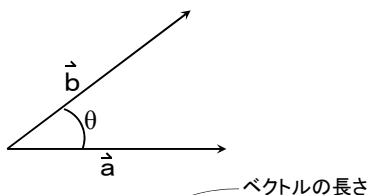
2. 時間領域と周波数領域

- ① フーリエ変換
- ② 関数の直交変換 (講習省略)
- ③ デジタル信号の周波数変換
- ④ 窓関数

関数の直交変換とは

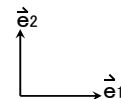
関数 $g(t)$ を
直交な成分に分解
↓
フーリエ変換は
直交変換となっている

幾何ベクトルの内積



内積: $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta$
 $\theta = 90^\circ \rightarrow$ 直交 $\rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0$
 $(\vec{a}, \vec{a}) \rightarrow \theta = 0^\circ \rightarrow |\vec{a}|^2$

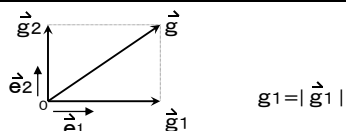
直交基底ベクトル



- ・単位ベクトル: 長さが1
 $|\vec{e}_1| = 1$
 \rightarrow 内積が1
 $(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = |\vec{e}_1|^2 = 1$
- ・直交単位ベクトル \vec{e}_1, \vec{e}_2
 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$

直交した単位ベクトルの集合 \Rightarrow (正規)直交基底ベクトル

ベクトルの直交分解



ベクトル g を直交した軸の成分で表すこと
 $\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = g_1 \cdot \vec{e}_1 + g_2 \cdot \vec{e}_2$

例) 2次元ベクトル g_1 は \vec{e}_1 と \vec{g} の内積で求まる
 $(\vec{e}_1, \vec{g}) = (\vec{e}_1, g_1 \cdot \vec{e}_1 + g_2 \cdot \vec{e}_2)$
 $= g_1 (\vec{e}_1, \vec{e}_1) + g_2 (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$
 $= g_1 \cdot 1 + g_2 \cdot 0$
 $= g_1$

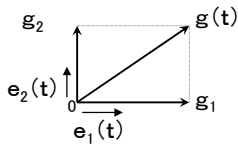
数ベクトルと内積

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

内積 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots$
 $= \sum_{i=1}^N a_i \cdot b_i = \mathbf{a}^* \mathbf{b}$ *: 共役転置

例) 幾何ベクトルの成分表示 \rightarrow 数ベクトル

関数の直交分解



連続関数は無限次元のベクトル

⇒ 任意の関数 \$g(t)\$ は、
直交基底関数 \$e_1(t), e_2(t), \dots\$ により
直交分解することができる。
$$g(t) = g_1 \cdot e_1(t) + g_2 \cdot e_2(t) + \dots$$

直交基底関数

- 関数の内積は、「積の積分」で定義される

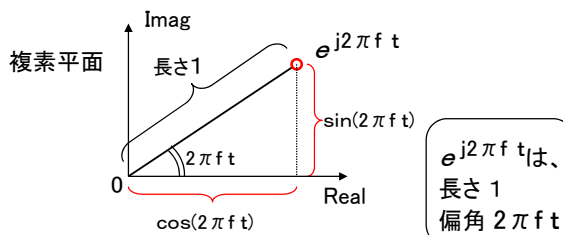
$$(e_i(t), e_j(t)) = \int e_i^*(t) e_j(t) dt$$
*: 共役
- 直交する \iff 内積がゼロ
- 直交基底関数系とは... ?
 内積 = 積分がゼロとなる関数の集まり
 $(e_1(t), e_2(t), e_3(t), \dots)$

(予備知識) 複素指数関数(1)

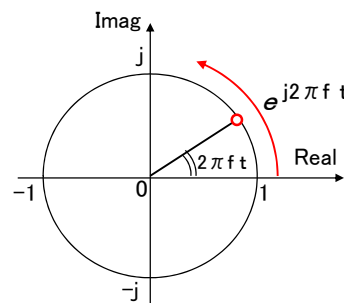
複素指数関数

$$e^{j2\pi f t} = \underbrace{\cos(2\pi f t)}_{\text{実数部}} + j \underbrace{\sin(2\pi f t)}_{\text{虚数部}}$$

複素数 実数部 虚数部



(予備知識) 複素指数関数(2)



\$t\$ が増加すると
\$e^{j2\pi f t}\$ は、
単位円上を回転

\$t\$ が \$1/f\$ で一回転
→ 周期 \$1/f\$

(予備知識) 複素指数関数(3)

- 負の周波数 \$-f\$ を持つ複素指数関数 \$e^{-j2\pi f t}\$
→ 単位円上を逆回転
- 正(\$e^{j2\pi f t}\$)と負(\$e^{-j2\pi f t}\$)とがあれば、
\$\sin, \cos\$ が復元できる。

$$e^{j2\pi f t} = \cos(2\pi f t) + j \sin(2\pi f t)$$

$$e^{-j2\pi f t} = \cos(2\pi f t) - j \sin(2\pi f t)$$

$$\cos(2\pi f t) = (e^{j2\pi f t} + e^{-j2\pi f t})/2$$

$$\sin(2\pi f t) = (e^{j2\pi f t} - e^{-j2\pi f t})/j$$
- 複素正弦波関数とも呼ばれる

直交基底関数の例

例) 複素指数関数 \$e^{j2\pi f t}\$ の集まり

$$\text{内積} = \int e_i^*(t) e_j(t) dt$$

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-j2\pi f_i t} \cdot e^{j2\pi f_j t} dt$$

$$= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{j2\pi (f_j - f_i) t} dt = \begin{cases} 1 & f_i = f_j \\ 0 & f_i \neq f_j \end{cases}$$

周波数の異なる複素指数関数は直交

⇒ 複素指数関数の集まりは直交基底関数系

直交分解とフーリエ変換

関数 $g(t)$ の直交分解は、直交基底関数と $g(t)$ の内積 (= 積の積分) で得られる。

$$(e_i(t), g(t)) = \int e_i^*(t) g(t) dt$$

例) 直交基底関数が、複素指数関数 $e^{j2\pi f t}$

$$(e^{j2\pi f t}, g(t)) = \int g(t) e^{-j2\pi f t} dt = G(f)$$



フーリエ変換は複素指数関数を基底ベクトルとした関数の直交分解 (直交変換)

ベクトル合成とフーリエ逆変換

ベクトルの合成

$$\mathbf{g} = g_1 \cdot \mathbf{e}_1 + g_2 \cdot \mathbf{e}_2 + g_3 \cdot \mathbf{e}_3 + \dots$$

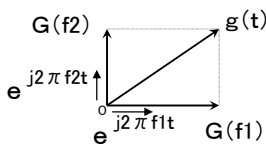
$$= \sum g_i \cdot \mathbf{e}_i$$

大きさ 基底

$$g(t) = \int G(f) e^{j2\pi f t} df$$

フーリエ逆変換

フーリエ変換の直交変換イメージ



フーリエ変換 $g(t)$ を基底 $e^{j2\pi f t}$ の成分 $G(f)$ に分解

フーリエ逆変換 $G(f)$ から $g(t)$ を合成

離散関数と数ベクトル

有限長の離散関数は有限数列

$$\mathbf{e}^{(n)} = \{e^{(0)}, e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(N-1)}\}$$

$$\mathbf{g}^{(n)} = \{g^{(0)}, g^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(N-1)}\}$$

数ベクトル

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e^{(0)} \\ e^{(1)} \\ \vdots \\ e^{(N-1)} \end{pmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g^{(0)} \\ g^{(1)} \\ \vdots \\ g^{(N-1)} \end{pmatrix}$$

有限長の離散関数は、数ベクトルと等価

有限長の離散関数の内積

内積は数ベクトルと同様に

$$(\mathbf{e}^{(n)}, \mathbf{g}^{(n)})$$

$$= \mathbf{e}^{*(0)} g^{(0)} + \mathbf{e}^{*(1)} g^{(1)} + \mathbf{e}^{*(2)} g^{(2)} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{e}^{*(n)} \cdot g^{(n)}$$



内積は、2つの関数の『積の総和』

連続関数では『積の積分』に対応

各種ベクトルの内積

ベクトル	内積
幾何ベクトル	$ \mathbf{a} \mathbf{b} \cos\theta$
数ベクトル 離散関数ベクトル	$\mathbf{a}^* \mathbf{b}$
連続関数ベクトル	$\int \mathbf{a}^*(t) \mathbf{b}(t) dt$
確率ベクトル	$E[\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b}]$ E : 期待値

- それぞれは、幾何ベクトルと同じイメージで考えることができる。
- 内積が0となる場合「 \mathbf{a} と \mathbf{b} は直交している」と言う。

2. 時間領域と周波数領域

- ① フーリエ変換
- ② 関数の直交変換 (講習省略)
- ③ デジタル信号の周波数変換
- ④ 窓関数

デジタル信号の周波数変換

- ・ z変換
- ・ DFT (離散フーリエ変換)
 - ・ FFT (高速フーリエ変換)

(p.37)

z 変換の定義式

z 変換

時間 → 周波数

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$x(n)$: 離散信号 z : 周波数領域を表す
複素変数

$X(z)$: 「信号 $x(n)$ の z 変換」と呼ばれる。

逆 z 変換

周波数 → 時間

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

z 変換の例

デジタル信号 = 数列

$$x(n) = \{x(-2), x(-1), x(0), x(1), x(2), x(3)\}$$

$$z \downarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ z^2 & z^1 & z^0 & z^{-1} & z^{-2} & z^{-3} \end{array} \right\}$$

z^{-n} を乗じて
総和をとる

$$\begin{aligned} X(z) &= x(-2)z^2 + x(-1)z^1 \\ &\quad + x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} \\ &= \sum x(n) z^{-n} \end{aligned}$$

z 変換 = z の多項式

z 変換の数値例

デジタル信号 = 数列

$$x(n) = \{1.6, 3.1, -0.7, 1.1, 1.3, 0.2\}$$

$$z \downarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ z^2 & z^1 & z^0 & z^{-1} & z^{-2} & z^{-3} \end{array} \right\}$$

z^{-n} を乗じて
総和をとる

$$\begin{aligned} X(z) &= 1.6 z^2 + 3.1 z^1 \\ &\quad - 0.7 + 1.1 z^{-1} + 1.3 z^{-2} + 0.2 z^{-3} \end{aligned}$$

z 変換 = z の多項式

逆 z 変換の実際

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

実際には複素積分を解くことは少なく、
 $X(z)$ を z の級数の形 $\sum x(n) z^{-n}$ に表して、
その係数を時間信号とする場合が多い。

$$X(z) \xrightarrow{\text{級数展開}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} \xrightarrow{\text{各 } z^{-n} \text{ の係数 } x_n \text{ (} n = -\infty \dots \infty \text{)}} x(n) = x_n$$

z の多項式として表す 逆z変換

フーリエ変換との関係 (1/2)

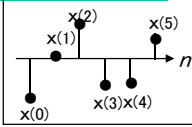
◇ フーリエ変換

$$X(f) = \int x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

◇ 離散信号のフーリエ変換

$$x(t) = \begin{cases} x(n) & t = n/fs \quad n: \text{整数} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad \text{なので}$$

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_n x(n) e^{-j2\pi f n/fs} \\ &= \dots + x(0) + x(1) \cdot e^{-j2\pi f/fs} + x(2) \cdot e^{-j2\pi 2f/fs} \\ &\quad + x(3) \cdot e^{-j2\pi 3f/fs} + x(4) \cdot e^{-j2\pi 4f/fs} \\ &\quad + x(5) \cdot e^{-j2\pi 5f/fs} + x(6) \cdot e^{-j2\pi 6f/fs} + \dots \end{aligned}$$



フーリエ変換との関係 (2/2)

フーリエ変換

$$X(f) = \sum_n x(n) e^{-j2\pi n f / fs} \quad e^{ab} = (e^a)^b$$

ここで、 $e^{j2\pi f/fs} = z$ と置くと

$$e^{-j2\pi n f/fs} = z^{-n} \text{ なので}$$

$$\begin{aligned} \sum_n x(n) z^{-n} &= \dots + x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} \\ &\quad + x(3) z^{-3} + x(4) z^{-4} + x(5) z^{-5} \\ &\quad + x(6) z^{-6} + \dots = X(z) \end{aligned}$$

z 変換

離散系の角周波数 Ω の導入

$$\Omega = 2\pi f / fs$$

・ 正規化周波数 f/fs に対応する角周波数

$$\left(\begin{array}{l} \text{信号の帯域は } f = -fs/2 \sim 0 \sim fs/2 \\ \text{それに対応して } f/fs = -1/2 \sim 0 \sim 1/2 \\ \text{それに対応して } \Omega = -\pi \sim 0 \sim \pi \end{array} \right)$$

・ Ω の範囲は、標準化周波数 fs に依存しない

・ $z = e^{j2\pi f/fs} \rightarrow e^{j\Omega}$ の簡単表現

z 変換 と フーリエ変換 (まとめ)

z 変換

$$X(z) = \sum_n x(n) z^{-n}$$

$$z = e^{j\Omega} \quad \updownarrow \quad e^{j\Omega} = z$$

フーリエ変換

$$X(\Omega) = \sum_n x(n) e^{-j\Omega n} \quad (\Omega = 2\pi f / fs)$$

$$(X(f) = \int x(t) e^{-j2\pi f t} dt)$$

ただし、 $t = n/fs$: 離散

(p.37)

z 変換の意義

◇ アナログのラプラス変換に相当 (フーリエ変換の周波数(実数)を複素数へ拡張)



- ・ 離散系の伝達関数が得られ、系の特性が把握できる (後述)
- ・ 実際の周波数分析より、フィルタ設計やシステム解析などの理論面で有用

z は連続関数なのでPCでは計算不可

◇ デジタル信号 (= 数列) が多項式として解析的に扱えるようになる

z 変換の重要な定理

$$\begin{array}{ccc} x(n) & \xleftrightarrow{Z} & X(z) \\ x(n-1) & \xleftrightarrow{Z} & z^{-1}X(z) \end{array} \quad \leftarrow \text{信号の遅れ}$$

$$(\text{証明}) X(z) = \sum_n x(n) \cdot z^{-n}$$

より、 $x(n-1)$ の z 変換は、 $(z^{-(m+1)})$

$$\begin{aligned} \sum_n x(n-1) \cdot z^{-n} &= \sum_m x(m) \cdot z^{-m} z^{-1} \\ &= z^{-1} \cdot X(z) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} n-1 = m \\ n = m+1 \end{array}$$

DFT

DFT: Discrete Fourier Transform
(離散フーリエ変換)

有限長の離散信号に対するフーリエ変換で、
有限個の離散スペクトルを得る

コンピュータで計算できる
現実的なフーリエ変換

DFT と FFT

DFT: Discrete Fourier Transform
(離散フーリエ変換)

FFT: Fast Fourier Transform
(高速フーリエ変換)

DFTを早く(少ない計算量で)計算する方法

計算の結果は、

$$\text{DFT} = \text{FFT}$$

DFTの定義式

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \exp(-j2\pi n \cdot k/N)$$

n(時間) = 0, 1, 2, ..., N-1 (N個)

k(周波数番号) = 0, 1, 2, ..., N-1 (N個)

逆変換 (IDFT, I: Inverse)

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot \exp(j2\pi n \cdot k/N)$$

DFTの行列表現と線形代数的解釈

a = -2π/N と置くと

$$\rightarrow \exp(-j2\pi n k/N) = e^{jnka}$$

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{ja} & e^{j2a} & \cdots & e^{j(N-1)a} \\ 1 & e^{j2a} & e^{j4a} & \cdots & e^{j2(N-1)a} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j(N-1)a} & e^{j2(N-1)a} & \cdots & e^{j(N-1)^2 a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

スペクトル

直交(ユニタリ)行列

信号

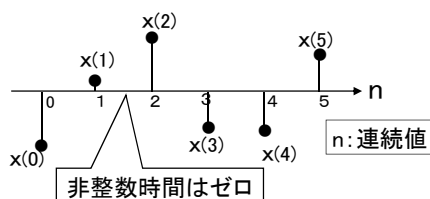
N次元ベクトルからN次元ベクトルへの直交変換

パルス列信号

◇ デジタル信号 = 数列

{x(0), x(1), x(2), x(3), x(4), x(5), ...}

◇ 時間軸上で表したパルス列信号 (アナログ信号)



DFTのアナログ的解釈 (1)

◇ デジタル的には、DFTは、

N個の数列(時間信号)と
N個の数列(スペクトル)の関係(線形代数的)

◇ アナログ的理解を得るために、

デジタル信号(=数列)が
アナログのパルス列信号(離散信号)だと考える。



周波数スペクトルは周期的。

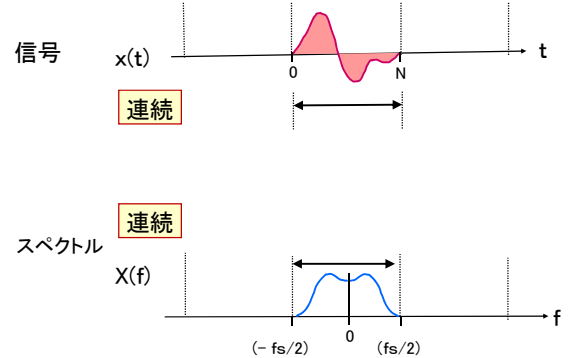
DFTのアナログ的解釈 (2)

◇ DFT の周波数スペクトルが**離散的**

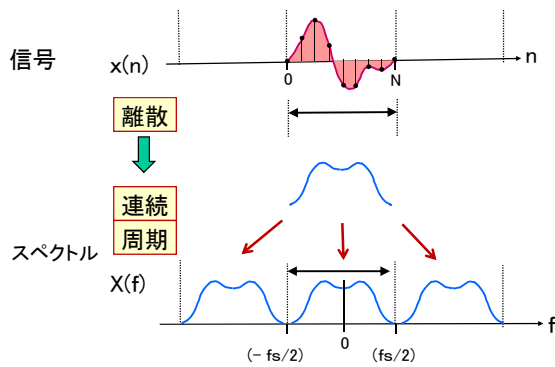
↓
時間信号が**周期的**

◇ アナログ的にはDFTは、
離散かつ周期的な信号と
離散かつ周期的なスペクトルとの
対応関係と考えられる。

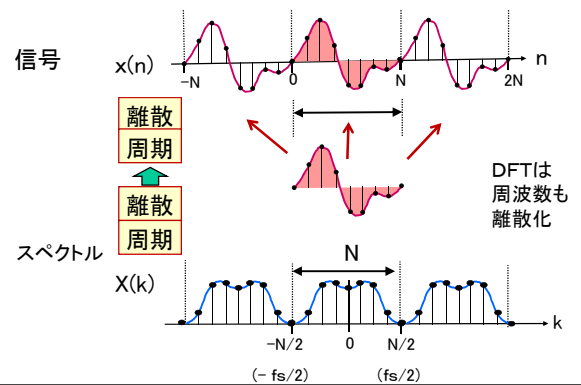
連続信号



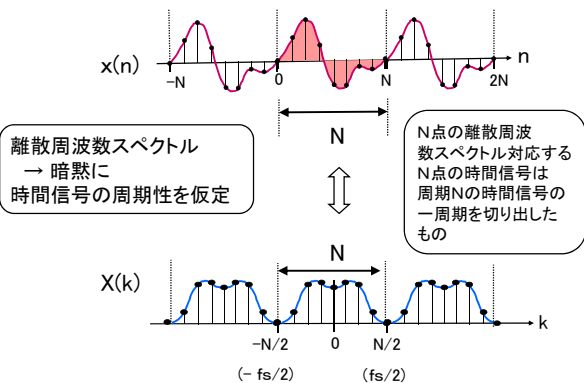
信号の離散化



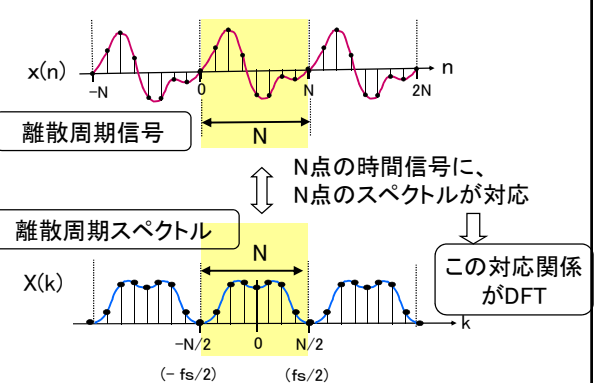
スペクトルの離散化



離散スペクトルを取り扱う際の注意



DFTのアナログ的解釈 (3)



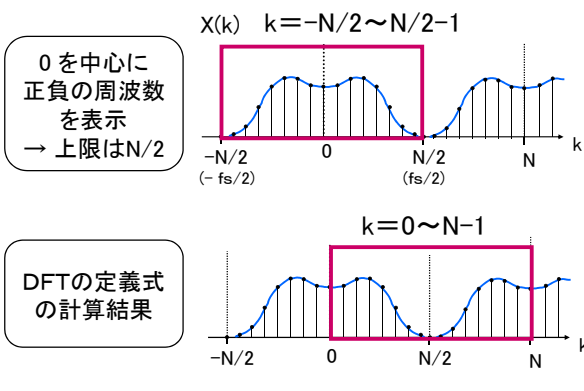
DFTのアナログ的解釈 (4)

- ◇ DFTは、
離散・周期的な信号と
離散・周期的なスペクトルとの
対応関係
- ◇ デジタル特有の「折り返し」や「回り込み」現象は、
この周期性が表れたものである

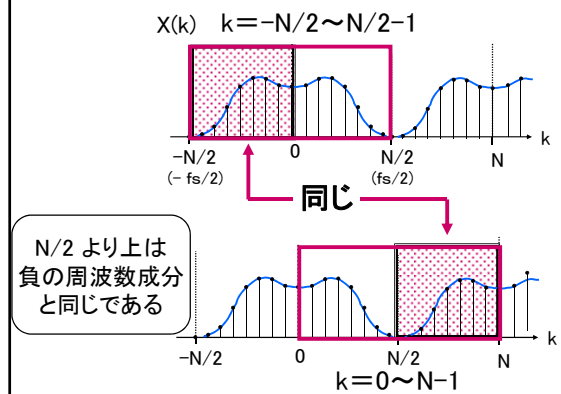
DFT と z 変換の対比

	時間信号 ↔	周波数 スペクトル
z 変換	任意個数の 離散信号	連続スペクトル (PCで扱えない) → 理論検討用
DFT	N点の 離散信号	N点の 離散スペクトル (PCで扱える) → 実用的

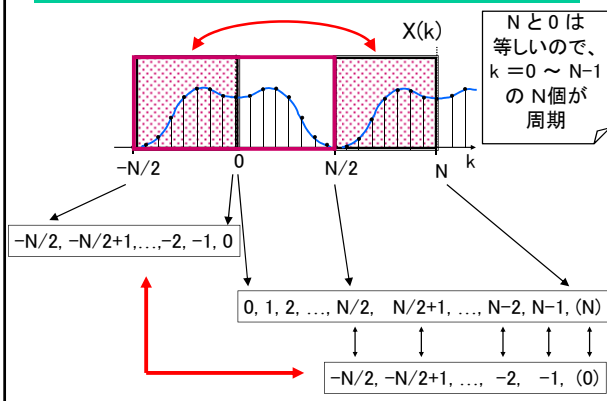
DFTスペクトルの表示



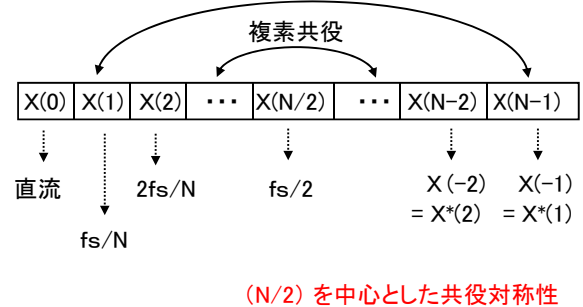
DFTスペクトルの周期性



DFTスペクトルの巡回関係 (数値対応)



FFT (DFT) 結果の周波数対応



DFT周波数軸の表示の単位

周波数番号 $k =$	0	1	2	...	$N/2$
	$X(0)$	$X(1)$	$X(2)$...	$X(N/2)$

アナログ周波数 $f =$ 直流 $\frac{fs}{N}$ $\frac{2fs}{N}$... $\frac{fs}{2}$
 標準化周期を1とした時の離散周波数 (k/N)
 (=正規化周波数 (f/fs))
 $= 0 \quad \frac{1}{N} \quad \frac{2}{N} \quad \dots \quad \frac{1}{2}$

◇ DFTの複素指数関数 $\exp\{j2\pi \cdot (k/N) \cdot n\}$ において、
 $2\pi \cdot (k/N) = \Omega$ とおくと、 $\exp\{j\Omega \cdot n\}$ となる。

離散系角周波数 $\Omega = 0 \quad \frac{2\pi}{N} \quad \frac{4\pi}{N} \quad \dots \quad \pi$

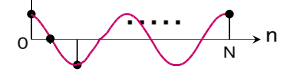
※ 周波数軸を Ω で表示することも多い。

離散系の DFT周波数

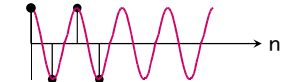
周波数 $1/N$ (周期 N)



周波数 $2/N$ (周期 $N/2$)



周波数 $(N/2)/N = 1/2$
 (周期 2)
 上限周波数



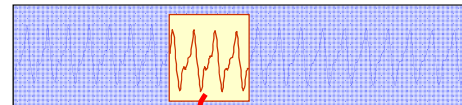
標準化周波数が1に対応し、周波数 $-1/2 \sim 1/2$

2. 時間領域と周波数領域

- ① フーリエ変換
- ② 関数の直交変換 (講習省略)
- ③ デジタル信号の周波数変換
- ④ 窓関数

窓かけ (Windowing)

信号は長時間継続している
 しかし、DFTは、短時間のデータを対象とする

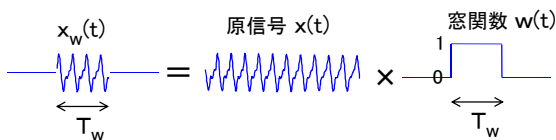


長時間のデータから、
 短時間のデータを
 取り出すことを
 「窓かけ」という

T_w

T_w : 窓長

窓かけの定式化



◇ 「窓かけ」は、原信号に窓関数 $w(t)$ を乗じたものと定式化できる。図では、(方形窓)

$$w(t) = \begin{cases} 1 & t_0 \leq t \leq t_0 + T_w \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を示したが、いろいろな形の窓関数がある。

代表的な窓関数

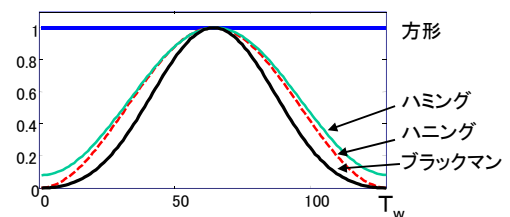
$t_0 \leq t \leq t_0 + T_w$ ($t_0 = 0$ の場合) の値。

方形窓: $w(t) = 1$

ハニング窓: $w(t) = 0.5 - 0.5 \cos(2\pi t / T_w)$

ハミング窓: $w(t) = 0.54 - 0.46 \cos(2\pi t / T_w)$

ブラックマン窓: $w(t) = 0.42 - 0.5 \cos(2\pi t / T_w) + 0.08 \cos(4\pi t / T_w)$



窓かけによるスペクトルの変化

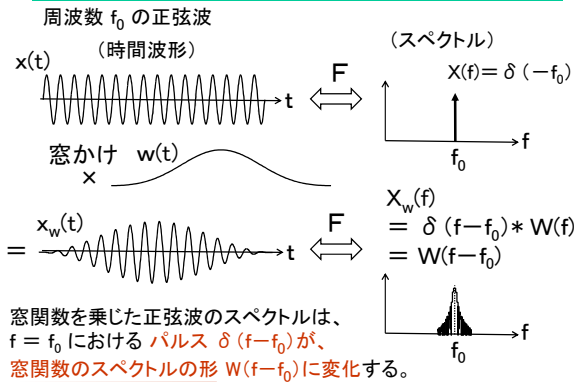
◇ 窓かけ(=時間領域の乗算)は、周波数領域のたたみ込みなので、

$$\begin{array}{l} \text{時間} \\ \text{フーリエ変換} \end{array} \quad x_w(t) = x(t) \times w(t) \quad \begin{array}{l} \text{原信号} \\ \text{窓関数} \end{array}$$

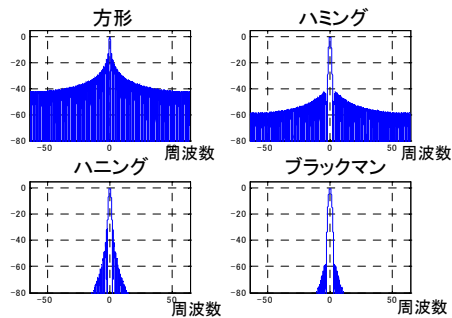
$$\begin{array}{l} \text{周波数} \\ \text{フーリエ変換} \end{array} \quad X_w(f) = X(f) * W(f) \quad \begin{array}{l} \text{たたみ込み} \end{array}$$

窓かけ後の信号は、原信号のスペクトル $X(f)$ に、窓関数のスペクトル $W(f)$ がたたみ込まれる

例) 正弦波のスペクトルに及ぼす窓関数の影響

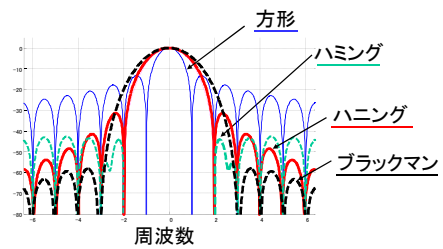


窓関数のスペクトル(1): サイドローブ



方形窓は、正弦波信号の持つ周波数以外の周波数にも、影響を及ぼす。ハミング窓も-50dB程度であるが、影響を及ぼす。

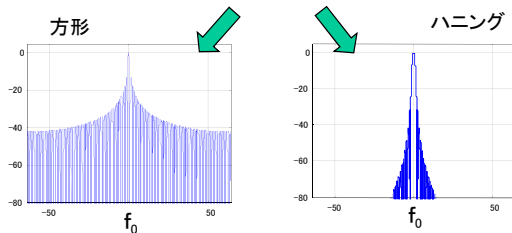
窓関数のスペクトル(2): ピーク幅



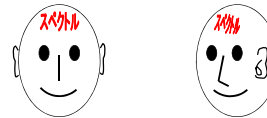
方形窓は、主成分が鋭い。ハミングは第1副成分が小さい。ブラックマンは主成分が最も広い。主成分が広いと、周波数分解能が低下する。

「正しい」スペクトル?

一般的信号に対し、2種の窓関数を使って、下記スペクトルが得られた。どちらが正しいスペクトルに近いのか?



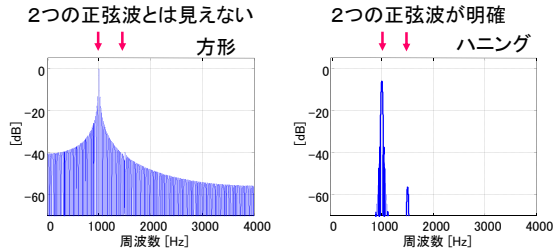
窓関数は、スペクトルを見る角度



- ◇ 同じ物でも、それを見る角度によって、見える部分や見える形が違ってくる。
- ◇ 角度を変えて見ているだけなので、どちらも「正しい」。

窓の違いによる 周波数分析結果の違いの例(1)

信号は、1000Hz の正弦波と、-50dB の 1500Hz の正弦波の和

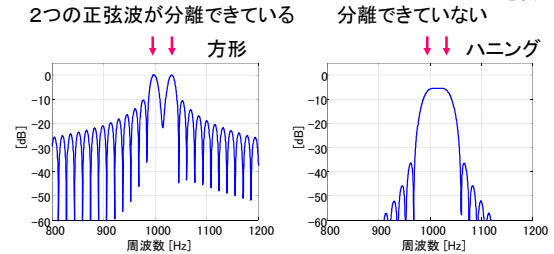


方形窓は、大きさの異なる周波数成分の分析には不向き

窓の違いによる 周波数分析結果の違いの例(2)

信号は、1000Hzと1030Hzの 同じ大きさの2つの正弦波の和

窓長: 65ms



方形窓は、近接した周波数の分離測定に向いている

(注) ハニングで分離できる場合もある

スペクトル形状は窓の長さにも依存

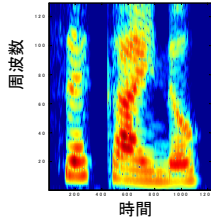
特に、非定常信号の短時間分析・処理において重要

音声分析の例

窓長 短 (8ms)

(高い時間分解能)

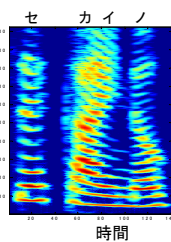
- ・ 大まかなスペクトル形状
- ・ ピッチ周期が見える



窓長 長い (64ms)

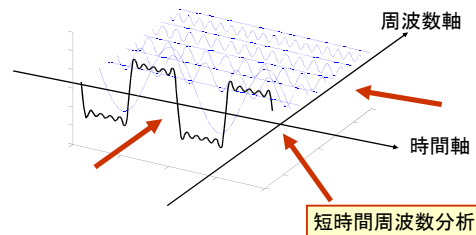
(高い周波数分解能)

- ・ 基本周波数の変化



短時間周波数分析のイメージ

振幅軸
(大きさ)



窓関数のトレードオフ

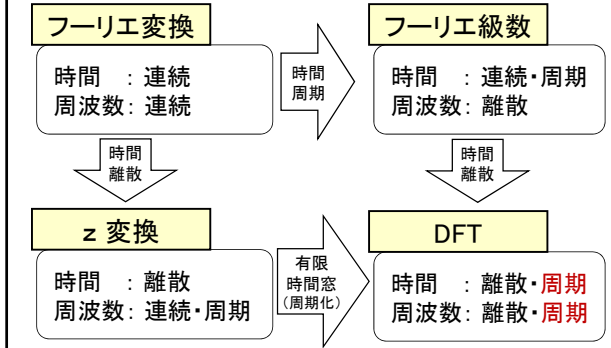
- 1) 窓関数の形状
サイドローブ と ピーク幅 のトレードオフ
- 2) 窓関数の長さ
時間分解能 と 周波数分解能 のトレードオフ

窓関数 (まとめ)

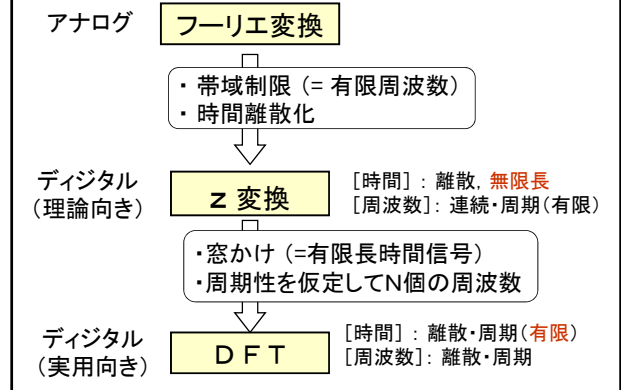
- ◇ どの窓関数が良いか、一般的な答は無い用途に応じて、適した窓を選ぶべき
- ◇ 最も一般的なのは、信号分析ではハニング窓、音声処理ではハミング窓
- ◇ 窓関数を用いた分析・処理を行う場合、何種類かの窓関数を用いて、結果を比較し、適切なものを選ぶと良い
- ◇ 窓長も変えたほうが良い (特に非定常信号)
- ◇ あまり差が無い場合も多いが、一度は比較してみるべき!

時間一周波数変換 (まとめ1)

4つの時間一周波数変換の関連



時間一周波数変換 (まとめ2)

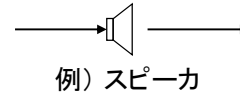


3. 線形システム(線形系)

① 線形系の概要

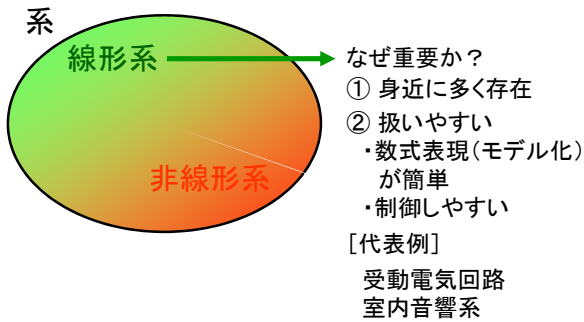
- ② インパルス応答
- ③ たたみ込み

系(システム)とは?

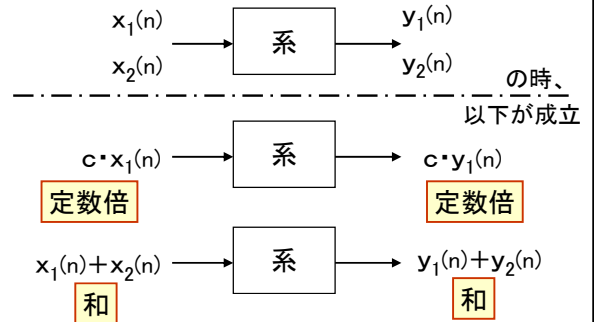


- ・室内音響系、マイクロホン、通信系
自動車、人間、etc
- ・フィルタなどの「処理」系

線形系



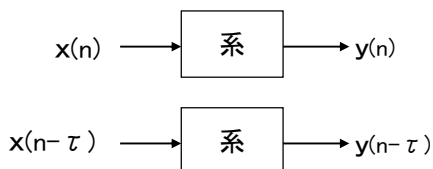
線形系の定義



(p.48)

時不変系

時間が経っても特性が変化しない系



時間 τ の後に、同じ入力を入れれば、
同じ出力が出てくる系

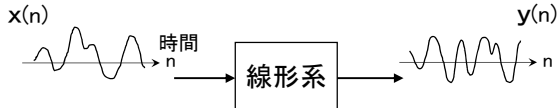
線形時不変系が前提

- ・デジタル信号処理理論において、多くの場合、「線形時不変系」が前提
(さもないと計測・制御の理論化が困難)
- ・ただし、短時間の間に大きく変化しなければ、ある程度の時変性や非定常性には対応できる信号処理理論もある。
→ 適応信号処理など
- ・時不変性 = (系や信号の) 定常性 とも言う

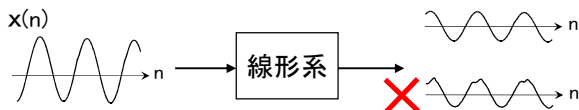
以降では、特にことわらない限り、
線形系 = 線形時不変系 とする

線形系の重要な性質

一般の(広帯域)信号を入力した時には、
通常、波形が大きく変化する



正弦波を入力した時には、
同じ周波数の正弦波を出力する。



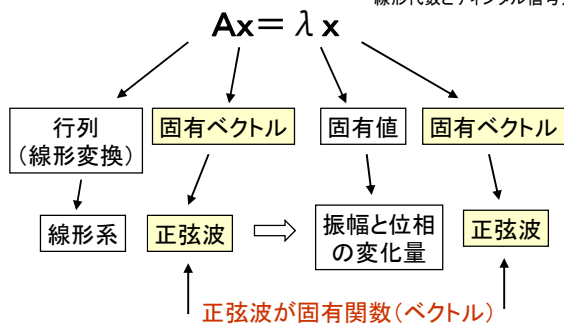
正弦波入力に対する線形系の出力

線形系に正弦波信号を入力すると、
波形は変わらない。
同じ周波数で、
振幅と位相のみが変化した
正弦波を出力する。

注) cos波も正弦波に含める(以下同様)
※ 証明は付録を参照

正弦波は線形系の固有関数

線形代数とデジタル信号処理



正弦波の変化量が重要な理由 (1)

1) フーリエ変換

全ての信号 $x(n)$ は、正弦波 $e^{j\Omega n}$
の荷重和として表される。

$$x(n) = \sum_{\Omega} X(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} \quad (1)$$

2) ある線形系に、周波数 Ω の正弦波 $e^{j\Omega n}$ を入力すると、 $G(\Omega)$ 倍されて出力されるとする。



正弦波の変化量が重要な理由 (2)

$$e^{j\Omega n} \rightarrow \boxed{G} \rightarrow G(\Omega) \cdot e^{j\Omega n}$$

◇ 定数 ($X(\Omega)$) 倍の正弦波 $X(\Omega) \cdot e^{j\Omega n}$ を入力

$$X(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} \rightarrow \boxed{G} \rightarrow X(\Omega) \cdot G(\Omega) \cdot e^{j\Omega n}$$

定数倍

◇ Ω で総和を取った信号 $x(n)$ を入力

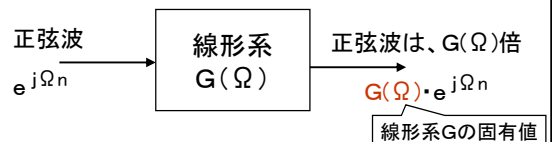
$$\sum_{\Omega} X(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} \rightarrow \boxed{G} \rightarrow \sum_{\Omega} X(\Omega) \cdot G(\Omega) \cdot e^{j\Omega n}$$

$$= x(n) \quad \quad \quad = y(n) \quad \text{和}$$

入力 $x(n)$ の持つ個々の周波数成分が何倍されるか、がわかれば出力がわかる

正弦波の変化量が重要な理由 (3)

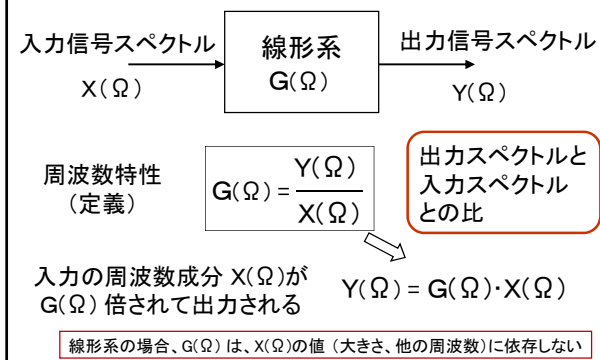
すなわち、個々の正弦波 $e^{j\Omega n}$ に対する
出力 $G(\Omega) e^{j\Omega n}$ がわかれば、
すべての入力信号 $x(n)$ に対する出力 $y(n)$ がわかる。



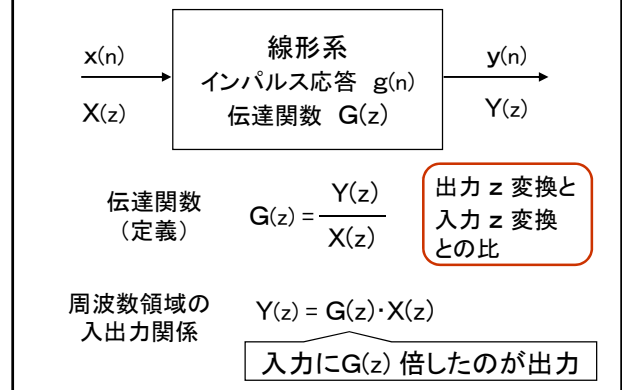
$G(\Omega)$ を系の「周波数特性」と呼ぶ

非線形だと成り立たない

周波数特性の一般的定義



伝達関数



線形系と正弦波(まとめ)

- ◇ 正弦波を入力したら正弦波が出力されるのは、正弦波が線形系(線形変換)の固有関数だからである。
(参考) 微分、積分も線形変換です
- ◇ その固有値は、周波数特性(伝達関数)である。
- ◇ ある線形系の周波数特性がわかれば、全ての入力に対する出力が予想できる。
- ◇ 正弦波や、周波数特性の重要性は、以上の理由による

非線形系

- ・ 線形系の性質が満足されない系。
- ・ 厳密には、多くの系が非線形系。
非線形の程度が小さい系 (または、入力の範囲など) を線形系とみなして信号処理を行う。
- ・ 非線形の程度が大きいと信号処理の効率が低下するので、注意が必要である。

音で感じる非線形

- ・ 非線形系では高調波歪が発生することが多い。
(スピーカ系では、オーバーロードの時など音が歪む、割れる)
- ・ ランダム(非周期)信号では、非線形の発生は「耳で」気づきにくい。

線形系の概要 (まとめ)

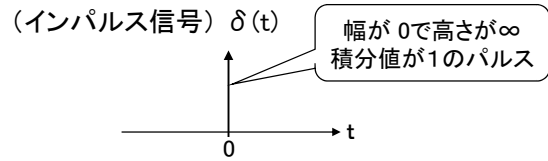
とくに断らない限り、
時不変な線形系は、
 信号処理の大前提

- ◇ 正弦波は、線形時不変系の固有関数

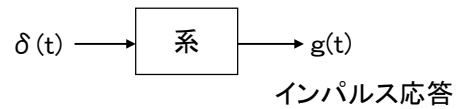
3. 線形系(線形システム)

- ① 線形系の概要
- ② **インパルス応答**
- ③ たたみ込み

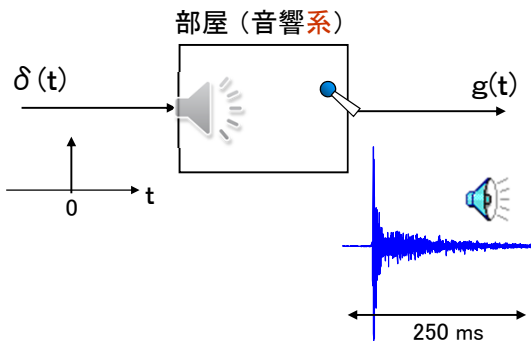
アナログ系のインパルス応答



インパルス信号を入力した時の系の出力



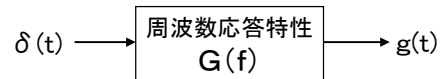
インパルス応答の例



インパルス応答と周波数特性

◇ 系のインパルス応答 $g(t)$ のフーリエ変換は、その系の周波数応答特性

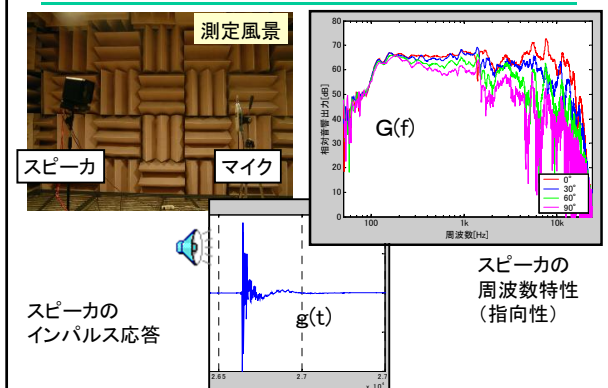
$$G(f) = \int g(t) e^{-j2\pi ft} dt$$



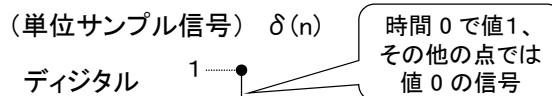
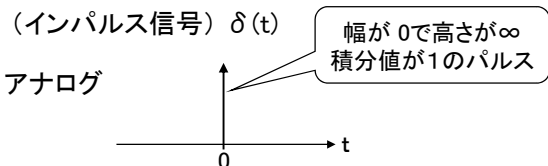
◇ 周波数応答特性 $G(f)$ の逆フーリエ変換は、インパルス応答 $g(t)$

→ 証明は付録

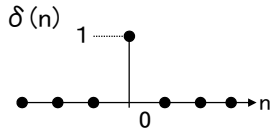
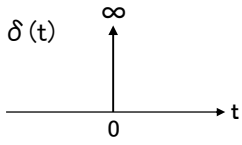
インパルス応答測定と周波数特性の例



デジタル系のインパルス信号

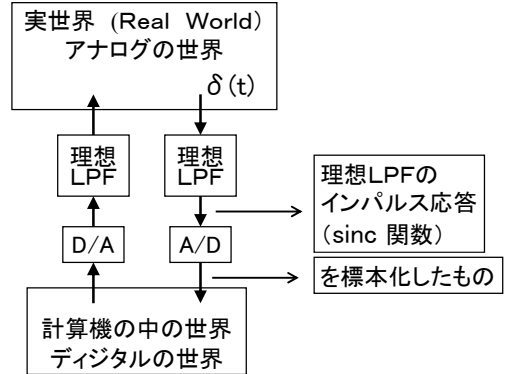


δ(t) と δ(n)

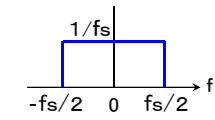


- ◇ δ(n) は δ(t) の物まねではない。
- ◇ デジタルはアナログを模倣したり、シミュレートするもので、模倣による誤差(違い)が発生する、という解釈は誤り。
- ◇ δ(n) と δ(t) は等価であることを以下に説明する。

δ(t) をデジタル世界から見ると

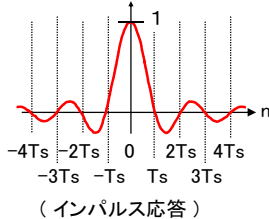


理想ローパスフィルタのインパルス応答



フーリエ変換

証明は付録



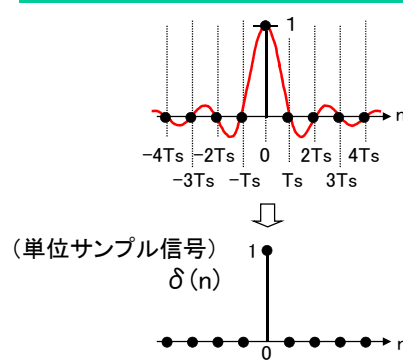
理想ローパスフィルタ
(周波数特性)

標準化周期 $T_s = 1/f_s$
の整数倍の時刻では
値が零になる

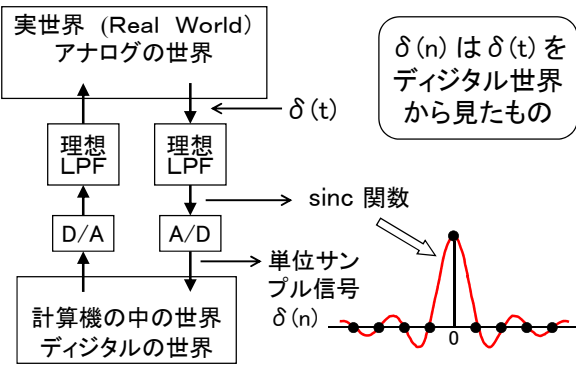
← $t = m/f_s = mT_s$ で、(m: 整数)
 $\pi f_s t = m\pi$ (分子がゼロ)

$$\frac{\sin \pi f_s t}{\pi f_s t}$$

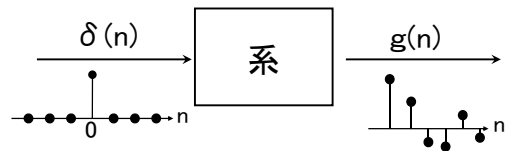
理想ローパスフィルタのインパルス応答を標本化すると



δ(t) と δ(n) の等価性



デジタル系におけるインパルス応答



単位サンプル信号 δ(n) に対する応答 g(n) を
デジタル系の
インパルス応答と呼ぶことは妥当

インパルス応答の特質

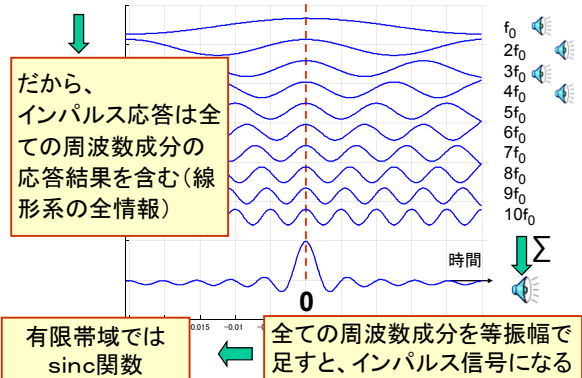
インパルス応答は、線形系の
全ての情報を含んでいる

例えば、

- ◇ インパルス応答がわかれば、あらゆる入力に対する出力がわかる
- ◇ インパルス応答の z 変換は、その線形系の伝達関数
- ◇ インパルス応答の DFT は、その線形系の周波数応答特性

次節で説明

インパルスは全ての周波数成分を含む



インパルス応答(まとめ)

- 1) デジタル系の単位サンプル信号 $\delta(n)$ はアナログ系のインパルス信号 $\delta(t)$ と等価
- 2) デジタル系の単位サンプル応答をインパルス応答と呼ぶ
- 3) インパルス応答は、線形系の最重要基本量

3. 線形系(線形システム)

- ① 線形系の概要
- ② インパルス応答
- ③ たたみ込み

演習: 多項式の積

$$\begin{aligned} & \{ a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 \} \\ & \times \{ b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + b_3 \cdot x^3 \} \\ & = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 + \dots + c_6 \cdot x^6 \end{aligned}$$

この多項式の掛け算を計算して、

c_0, c_1, c_2, c_3 を求めよ。(c_4, c_5, c_6 は不要) クイズではありません。

→ 自分のノート(用紙)かテキストの隅などに

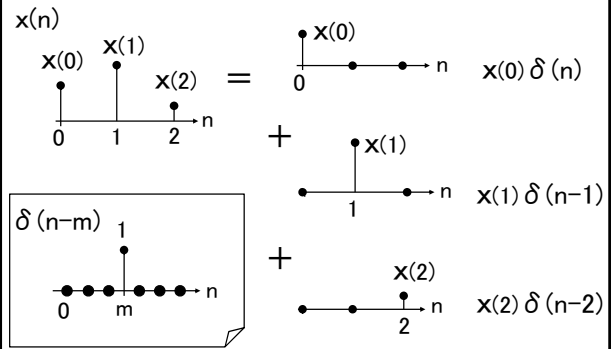
たたみ込み

線形系の出力 $y(n)$ は、
 入力信号 $x(n)$ と、
 系のインパルス応答 $g(n)$ との
 たたみ込み演算 $*$ で表される。

$$y(n) = x(n) * g(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot g(n-m)$$

<線形系特有の演算>
 線形系の性質からたたみ込み演算の
 必然性が導出できる

単位サンプル信号を用いた信号表現



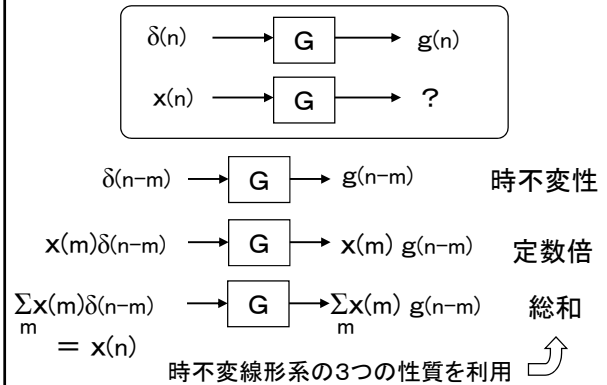
(p.48)

単位サンプル信号を用いた信号表現(2)

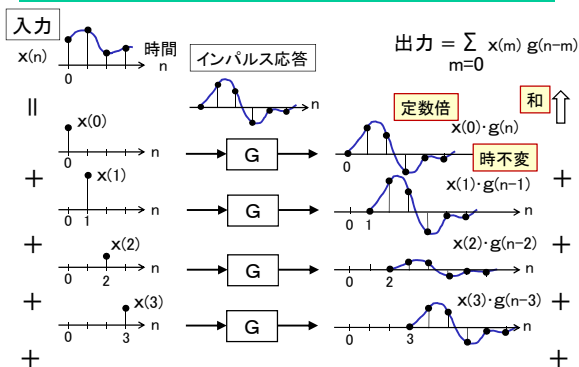
$$\begin{aligned} x(n] &= x(0) \delta(n-0) + x(1) \delta(n-1) \\ &\quad + x(2) \delta(n-2) + \dots \\ &= \sum_m x(m) \delta(n-m) \end{aligned}$$

入力信号 $x(n]$ は、
 単位サンプル信号 $\delta(n]$ の時間シフト $\delta(n-m]$ 、
 定数 ($x(m)$) 倍、その総和
 として表される。

線形系の入出力関係



線形系の性質とたたみ込みのイメージ



たたみ込み

$x(n)$: 系に対する入力信号
 $g(n)$: 系のインパルス応答
 $y(n)$: 系の出力信号

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)g(n-m)$$

インパルス応答 g を知れば、任意の入力 x
 に対する 出力 y が計算で求められる

(定理) たたみ込みの可換性

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)g(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(m)x(n-m)$$

$$y(n) = x(n) * g(n) = g(n) * x(n)$$

インパルス応答が $g(n)$ である系に、
 信号 $x(n)$ を入力したときの出力
 = インパルス応答が $x(n)$ である系に、
 信号 $g(n)$ を入力したときの出力

インパルス応答の因果性を
 考慮した表示

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)g(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(m)x(n-m)$$

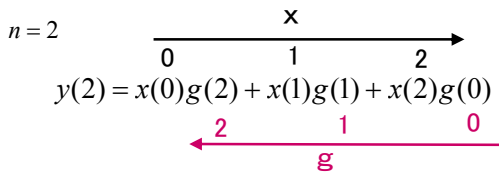
インパルス応答の因果性 $\rightarrow g(m) = 0$ for $m < 0$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)g(n-m) = \sum_{m=-\infty}^n g(m)x(n-m)$$

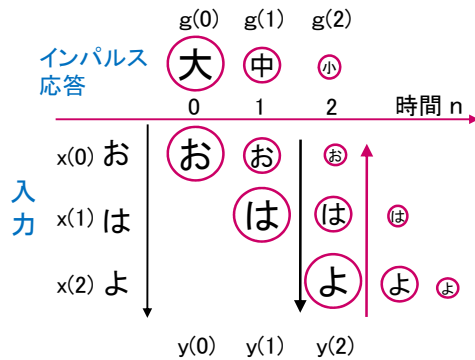
たたみ込みの例

さらに、 $x(m) = 0$ for $m < 0$ を仮定すれば、

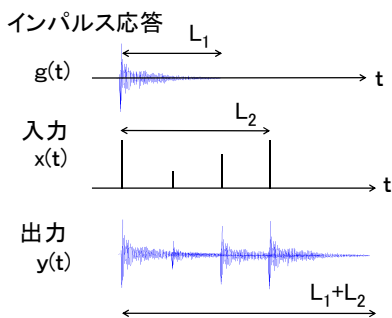
$$y(n) = \sum_{m=0}^n x(m)g(n-m) = \sum_{m=0}^n g(m)x(n-m)$$



たたみ込みのイメージ (2)



たたみ込みと信号長



出力の長さ = 入力長 + インパルス応答長

z 変換の積は多項式の積なので

$$\begin{cases} x(n) \rightarrow X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots \\ g(n) \rightarrow G(z) = g(0) + g(1)z^{-1} + g(2)z^{-2} + \dots \end{cases}$$

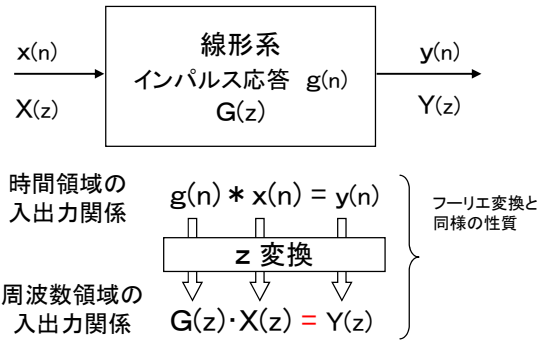
$$G(z)X(z) = \underbrace{y(0)}_{g(0)x(0)} z^0 + \underbrace{y(1)}_{(g(0)x(1) + g(1)x(0))} z^{-1} + \underbrace{y(2)}_{(g(0)x(2) + g(1)x(1) + g(2)x(0))} z^{-2} + \dots$$

多項式の積において、各項はたたみこみの形になる

$y(2)$

z 変換の積 = たたみ込みの z 変換

z 変換の積は、たたみ込みの z 変換



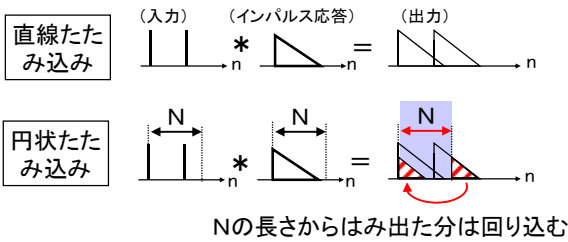
z 変換の重要な性質、について

- 1) $y(n) = g(n) * x(n) \iff Y(z) = G(z) X(z)$
(時間領域のたたみ込み) (z 変換の積)
- 2) 系のインパルス応答 $g(n)$ の z 変換 $G(z)$ が伝達関数となる。
∵ 入力インパルス信号の時、 $X(z)=1$ なので、
出力 $y(n)=g(n)$ の z 変換 $Y(z)$ は $G(z)$ となる。
- 3) 伝達関数 $G(z)$ に、 $z=e^{j\Omega}$ を代入すると、
周波数特性が得られる。 Ω : 離散角周波数

DFTの積 (重要!)

DFT の積は、時間領域では円状(巡回)たたみ込み

⇔ フーリエ変換(アナログ)の積や z 変換の積は、
直線たたみ込み(通常たたみ込み)に対応

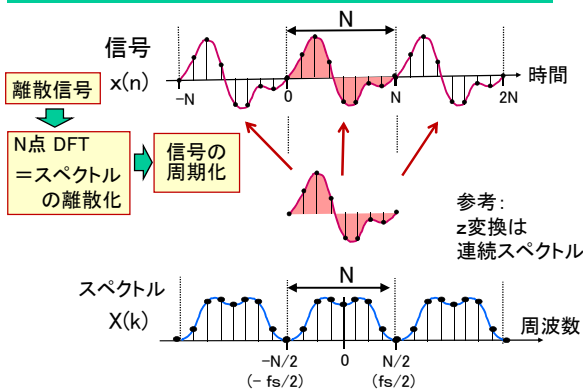


※ 円状たたみ込みの詳細に関しては付録も参照

2種類のたたみ込み

- 1) 直線たたみ込み
= 線形たたみ込み
(これまで説明したもの)
- 2) 円状たたみ込み
= 巡回たたみ込み
= 循環たたみ込み
(長さが N の 2 つの信号の直線たたみ込みの結果、
N の長さからはみ出た分が先頭に回り込む)
(= 周期化した信号の直線たたみ込み結果を
その周期で切り出したもの)

DFT は 離散化した周波数スペクトル

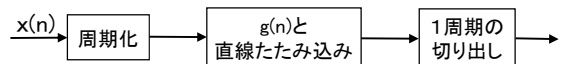


DFT周波数の積に対応する時間領域操作

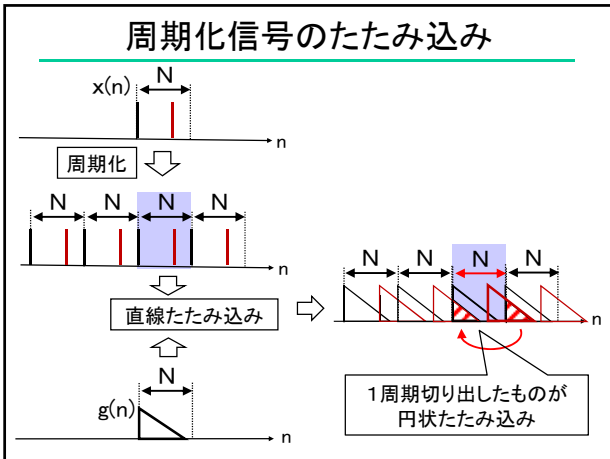
◇ DFT周波数(離散化周波数)を扱うことは、
周期化した信号を扱っていることになる

⇒ DFTスペクトルの積は、周期化した信号の
(直線)たたみ込みに対応

$x(n)$ の DFT $X(k)$ と、 $g(n)$ の DFT $G(k)$ の
積 $X(k) \cdot G(k)$ に対応する時間領域の演算は、



注: $g(n)$ は周期化しなくても結果は(振幅を除いて)同じ



Z変換の積

Z変換の結果は連続スペクトル
(Zの複素連続値に対して値を持つ)

⇒ よって、信号は周期性されず、Z変換の積は直線たたみ込みに対応

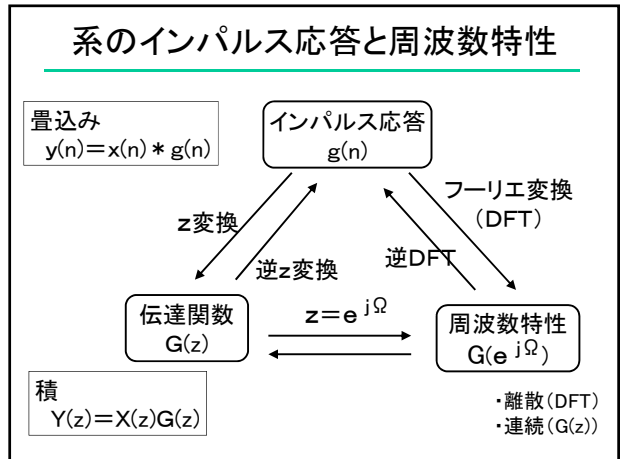
⇒ しかし、連続値であるので、コンピュータでZ変換を計算することはできない

周波数変換とたたみ込みの関係

Z変換の積 ⇔ 直線たたみ込み
(実存する物理現象)

DFTの積 ⇔ 円状たたみ込み
(やや人工的な現象)

(参考)
フーリエ変換 ⇔ 直線たたみ込みの積



インパルス応答とたたみ込み(まとめ)

◇ 線形系のインパルス応答
(単位サンプル応答) $g(n)$ を知れば
任意の入力信号 $x(n)$ に対する系の出力 $y(n)$ が、たたみ込み演算によって計算できる。
$$y(n) = \sum_m g(m) x(n-m)$$

◇ インパルス応答 $g(n)$ の
z変換 $G(z)$ が伝達関数、
DFTが周波数特性 $G(e^{j\Omega})$ となる。

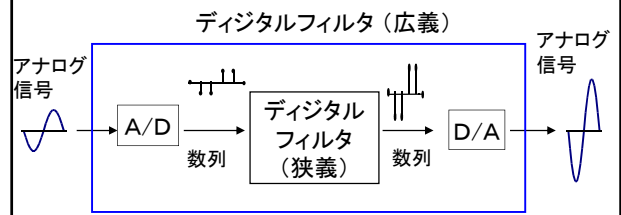
◇ インパルス応答からは、その他にも
さまざまな特徴量(残響時間、MTFなど)が得られる。

4. デジタルフィルタ

① デジタルフィルタとは

- ② フィルタの種類と伝達関数
 - ③ 極と零点によるフィルタの特性解析
 - ④ フィルタの実行
 - ⑤ フィルタの設計
- * 信号処理による高周波成分の発生

デジタルフィルタとは



(A/D、D/Aは、低域通過フィルタを含んでいる)

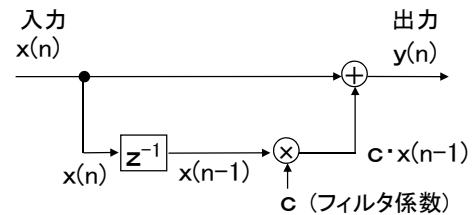
デジタルフィルタは線形系

デジタルフィルタの大半は線形系であるので、第3章の結果がすべて適用できる

- ・インパルス応答
- ・周波数特性
- ・たたみ込み

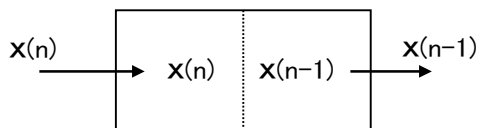
デジタルフィルタの構成要素

最も簡単なデジタルフィルタの例



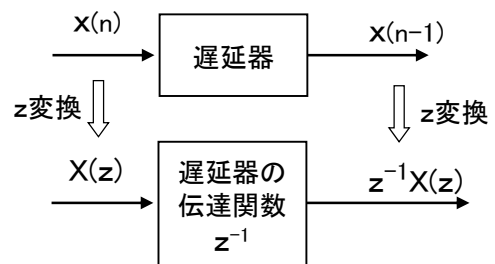
構成要素: \otimes 乗算器 \oplus 加算器 z^{-1} (単位)遅延器

遅延器



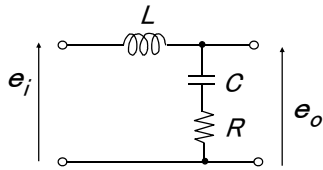
遅延器とは、
現在の信号 $x(n)$ を入力し、
1時刻前の信号 $x(n-1)$ を出力する。

遅延器の伝達関数



アナログフィルタの特性表現

構成要素は、
L C R
(パッシブフィルタの例)



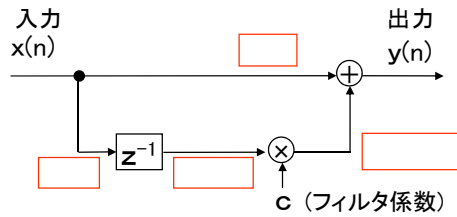
入出力関係の
表現は
微分方程式

$$v = L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q$$

解析は
ラプラス変換

$$V = s^2 L Q + s R Q + \frac{1}{C} Q$$

演習: デジタルフィルタの特性を計算



入出力関係は
差分方程式 $y(n) =$

解析は
Z変換

(p.42)

演習: フィルタの伝達特性

Z変換

$$Y(z) =$$

伝達関数

$$G(z) =$$

周波数特性

$$G(\Omega) =$$

フィルタの周波数特性の計算

$$c = 1$$

$$\begin{aligned} G(\Omega) &= 1 + e^{-j\Omega} \\ &= e^{-j\Omega/2} (e^{j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2}) \\ &= e^{-j\Omega/2} \cdot 2 \cdot \cos(\Omega/2) \end{aligned}$$

振幅特性

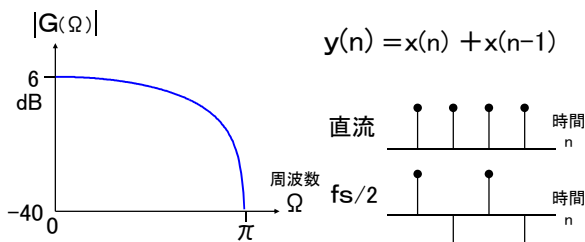
$$|G(\Omega)| = 2 \cdot |\cos(\Omega/2)|$$

$$\begin{array}{l} \Omega \quad -\pi \sim 0 \sim \pi \\ f \quad -fs/2 \sim 0 \sim fs/2 \end{array}$$

フィルタの周波数特性図 (1)

$$c = 1$$

$$|G(\Omega)| = 2 \cdot |\cos(\Omega/2)|$$



(低域通過フィルタ) ($fs/2$)

フィルタの周波数特性の計算

$$c = -1$$

$$\begin{aligned} G(\Omega) &= 1 - e^{-j\Omega} \\ &= e^{-j\Omega/2} (e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}) \\ &= e^{-j\Omega/2} \cdot 2j \cdot \sin(\Omega/2) \end{aligned}$$

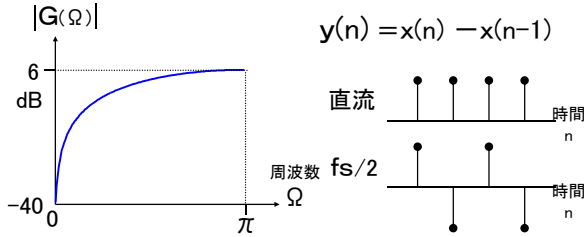
振幅特性

$$|G(\Omega)| = 2 \cdot |\sin(\Omega/2)|$$

$$\begin{array}{l} \Omega \quad -\pi \sim 0 \sim \pi \\ f \quad -fs/2 \sim 0 \sim fs/2 \end{array}$$

フィルタの周波数特性図 (2)

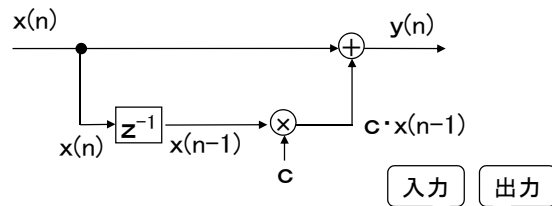
$$c = -1 \quad |G(\Omega)| = 2 \cdot |\sin(\Omega/2)|$$



(高域通過フィルタ) ($fs/2$)
(低域除去フィルタ)

特性はフィルタ係数に依存

デジタルフィルタの実体はプログラム



$$y(n) = x(n) + c \cdot x(n-1)$$

差分方程式を計算する
プログラム例

```
Function Filt(xn, yn)
double xn, xn1, c, yn
yn=xn+c*xn1
xn1=xn
return
```

デジタルフィルタの アナログフィルタに対する優位性

長所

- ・ 集積回路で実現 (小さい、安い)
- ・ 特性が安定 (熱・経年)
- ・ 自由な周波数特性が実現
- ・ 特性の変更が容易 (メモリの書き換え)
- などなど

短所

- ・ 演算時間が大きい場合があり、遅延が生じることがある

デジタルフィルタとは、(まとめ)

- ◇ 乗算・加算・遅延・フィルタ係数
- ◇ フィルタ特性の求め方
 - ・ 差分方程式 $\rightarrow z$ 変換
 - ・ 伝達関数 $G(z) = Y(z)/X(z)$
 - ・ $z = e^{j\Omega} \Leftrightarrow$ 周波数特性 $G(\Omega)$
- ◇ 周波数特性は **フィルタ係数** に依存
- ◇ デジタルフィルタはプログラム

4. デジタルフィルタ

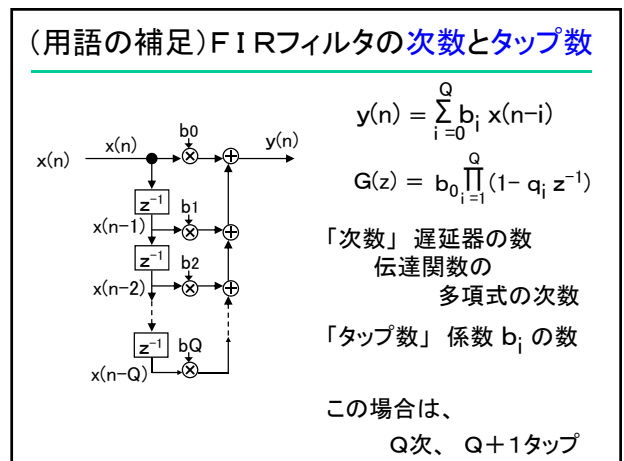
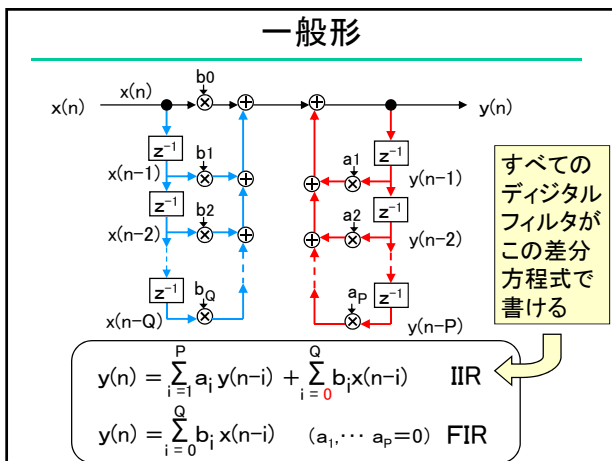
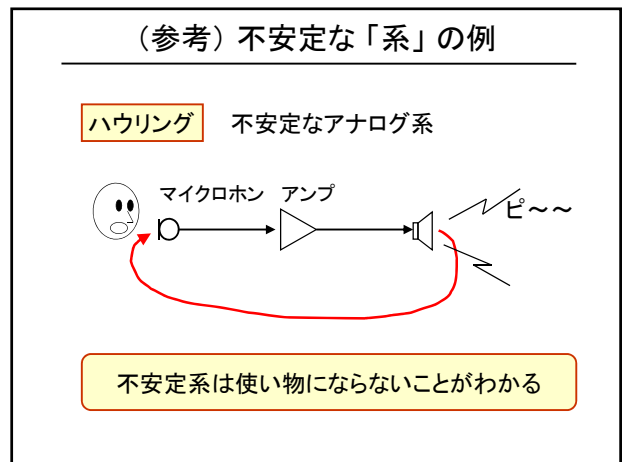
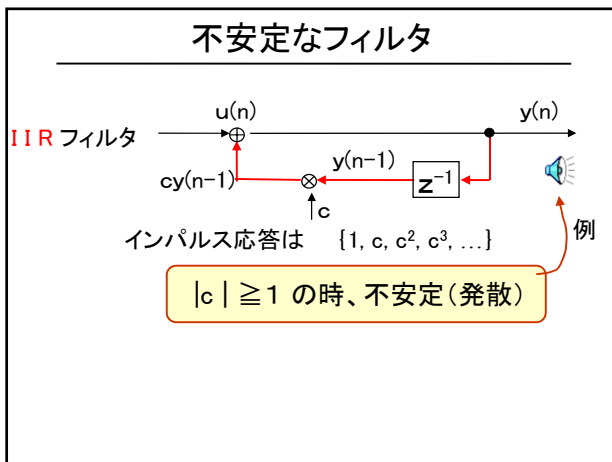
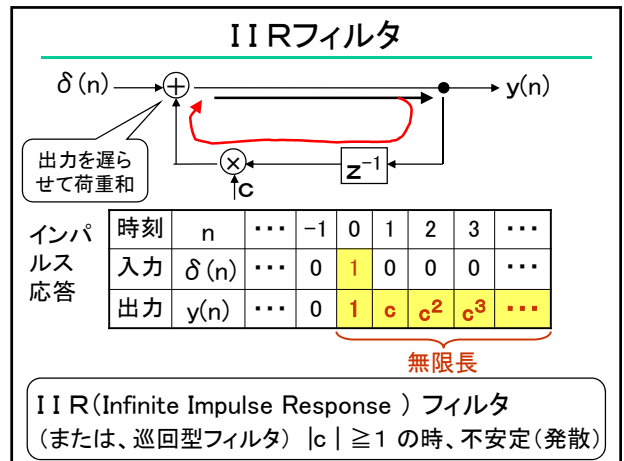
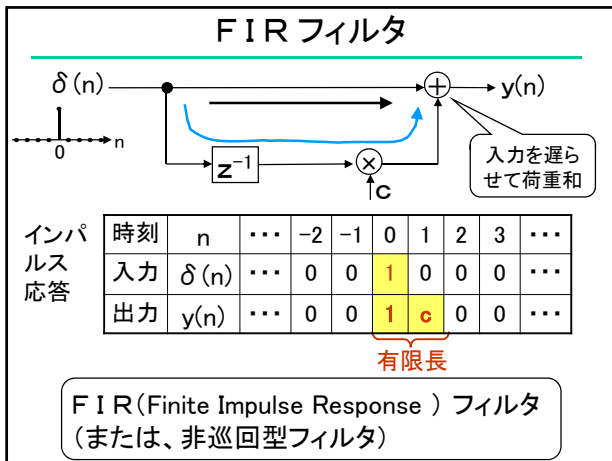
- ① デジタルフィルタとは
 - ② **フィルタの種類と伝達関数**
 - ③ 極と零点によるフィルタの 特性解析
 - ④ フィルタの実行
 - ⑤ フィルタの設計
- *) 信号処理による高周波成分の発生

2種類のフィルタ

FIR (Finite Impulse Response) フィルタ
有限 インパルス応答

IIR (Infinite Impulse Response) フィルタ
無限 インパルス応答

(p.44)



フィルタ(一般形)の伝達関数

$$y(n) = \sum_{i=1}^P a_i y(n-i) + \sum_{i=0}^Q b_i x(n-i)$$
 差分方程式

$$Y(z) = \sum_{i=1}^P a_i z^{-i} Y(z) + \sum_{i=0}^Q b_i z^{-i} X(z)$$
 z変換

$$(1 - \sum_{i=1}^P a_i z^{-i}) Y(z) = (\sum_{i=0}^Q b_i z^{-i}) X(z)$$
 移項

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^Q b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^P a_i z^{-i}}$$
 伝達関数

多項式に関する性質 (1)

① 多項式

$$B(z) = \sum_{i=0}^Q b_i z^{-i} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_Q z^{-Q}$$

に対して、

$B(z) = 0$ を満たす z の値 q を
「根」(または、「解」) と呼ぶ。

② 多項式の根の数は、複素根、重根も含めると、
多項式の次数 (Q 次多項式は Q 個) の根を持つ

多項式に関する性質 (2)

③ 多項式は、 Q 個の根 q_i ($i=1, 2, \dots, Q$) を用いて
因数分解した形で表すことができる。

$$B(z) = b_0 \cdot (1 - q_1 z^{-1})(1 - q_2 z^{-1})(1 - q_3 z^{-1}) \dots (1 - q_Q z^{-1})$$
$$= b_0 \cdot \prod_{i=1}^Q (1 - q_i z^{-1})$$

(q_i が根であることの確認)

$1 - q_i z^{-1} = 1 - \frac{q_i}{z}$ であるので、 $z = q_i$ で、
 $B(z)$ はゼロになる。

伝達関数の因数分解

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^Q b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^P a_i z^{-i}}$$
$$= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + \dots + b_Q z^{-Q}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - a_3 z^{-3} - \dots - a_P z^{-P}}$$
$$= \frac{b_0 \cdot (1 - q_1 z^{-1}) \cdot (1 - q_2 z^{-1}) \cdot \dots \cdot (1 - q_Q z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1}) \cdot (1 - p_2 z^{-1}) \cdot \dots \cdot (1 - p_P z^{-1})}$$
$$= \frac{b_0 \prod_{i=1}^Q (1 - q_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^P (1 - p_i z^{-1})}$$

← q_i : 分子多項式の根
← p_i : 分母多項式の根

極と零点

$$G(z) = \frac{b_0 \prod_{i=1}^Q (1 - q_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^P (1 - p_i z^{-1})}$$

$\rightarrow z = q_i$ で 0 → $G(z)$ が 0

\downarrow

$$(1 - \frac{p_i}{z}) \rightarrow z = p_i$$

$\rightarrow z = p_i$ で 0 → $G(z)$ が ∞

極: $G(z)$ の値を ∞ とする z の値 p_i
零点: $G(z)$ の値を 0 とする z の値 q_i

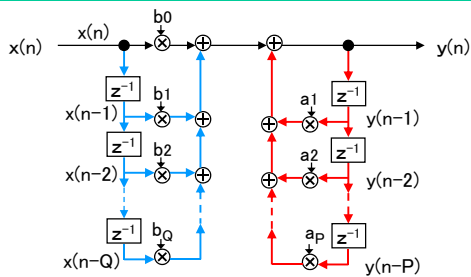
4. デジタルフィルタ

- ① デジタルフィルタとは
 - ② フィルタの種類と伝達関数
 - ③ 極と零点によるフィルタの特性解析
 - ④ フィルタの実行
 - ⑤ フィルタの設計
- *) 信号処理による高周波成分の発生

③ 極と零点に基づくフィルタの特性解析

- (1) フィルタの安定条件
伝達関数の部分分数展開
- (2) 周波数特性の定性的理解
伝達関数の z 平面上表現
- (3) フィルタの分類

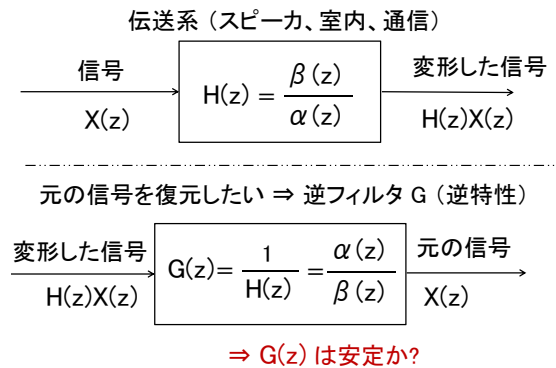
フィルタの安定性判定



設計したフィルタが安定かどうか、を判定する必要がある

a_1 だけなら ($a_2=a_3=\dots=0$) 判定は簡単だが...

フィルタの安定判定が必要な実例



フィルタの安定条件 (IIR フィルタ)

$$G(z) = \frac{b_0 \prod_{i=1}^Q (1 - q_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^P (1 - p_i z^{-1})}$$

フィルタが安定である (発散しない) 条件は、その伝達関数 $G(z)$ のすべての極 p_i ($i = 1, 2, \dots, P$) の絶対値が $|p_i| < 1$

伝達関数の部分分数展開

$$G(z) = \frac{b_0 \cdot (1 - q_1 z^{-1}) \cdot (1 - q_2 z^{-1}) \cdots (1 - q_Q z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1}) \cdot (1 - p_2 z^{-1}) \cdots (1 - p_P z^{-1})}$$

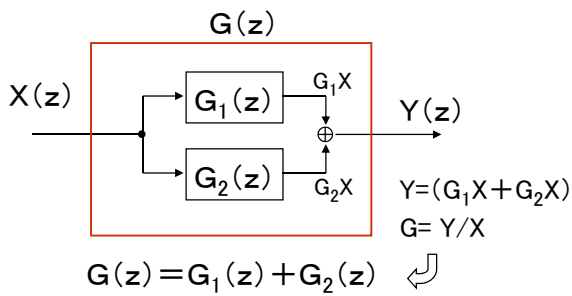
$$= \sum_{i=0}^N C_i z^{-i} + \sum_{i=1}^P \frac{D_i}{1 - p_i z^{-1}} \quad C_i, D_i : \text{定数}$$

$$= \sum_{i=0}^N C_i z^{-i} + \frac{D_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{D_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \cdots + \frac{D_P}{1 - p_P z^{-1}}$$

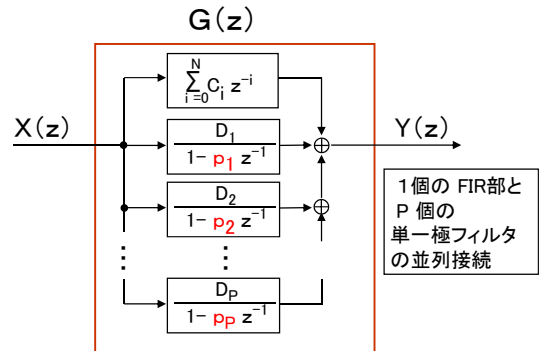
FIR 部分 \rightarrow $\sum_{i=0}^N C_i z^{-i}$

単一極特性 (IIR 部分) \rightarrow $\frac{D_i}{1 - p_i z^{-1}}$

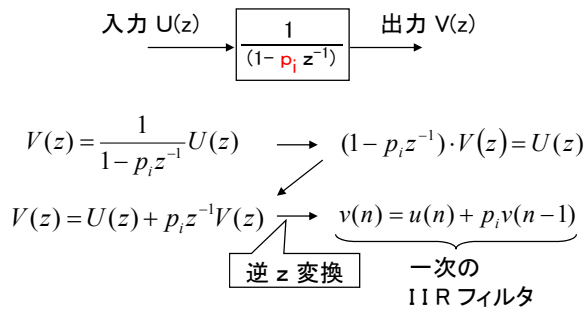
伝達関数の和は並列接続



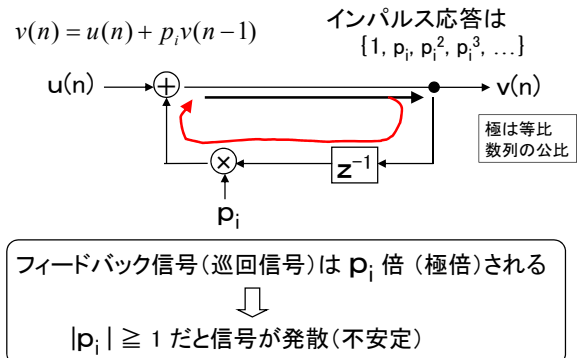
部分分数展開のブロック図



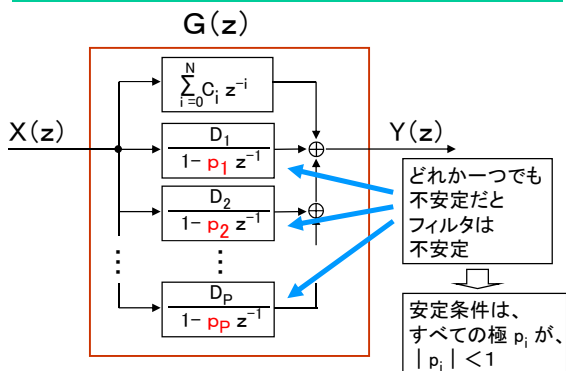
単一極フィルタ



極はフィードバックゲインを表す



フィルタの安定条件



③ 極と零点に基づくフィルタの特性解析

- (1) フィルタの安定条件
伝達関数の部分分数展開
- (2) 周波数特性の定性的理解
伝達関数の z 平面上表現
- (3) フィルタの分類

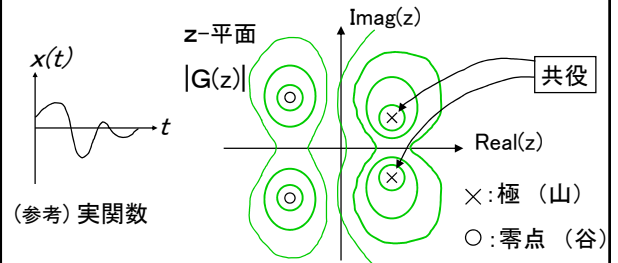
極と零点に関する一つの性質

$$G(z) = \frac{b_0 \prod_{i=1}^Q (1 - q_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^P (1 - p_i z^{-1})}$$

- ◇ $G(z)$ の分子分母は実係数多項式なので、共役数はともに根。
- 例) $a + jb$ が極(零点)なら、 $a - jb$ も極(零点)

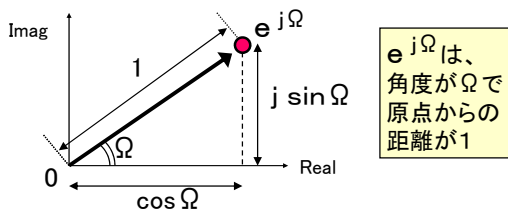
複素平面(z-平面)で見る伝達関数

$G(z)$: 複素数 z に対して、値を与える複素関数
 z -平面: 複素数 z に対応した平面
 $\Rightarrow |G(z)|$ は、 z -平面上に等高線表示できる。



複素指数関数 $e^{j\Omega}$

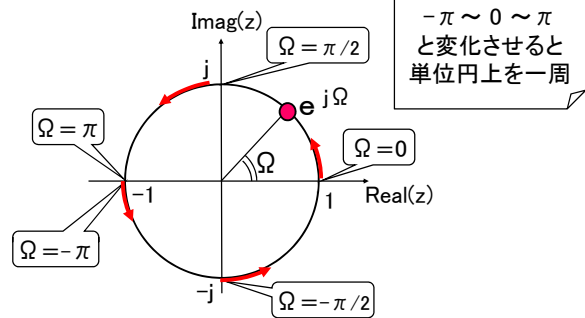
$e^{j\Omega} = \cos \Omega + j \sin \Omega$ Ω : 実数
 実数成分 $\cos \Omega$ と、虚数成分 $\sin \Omega$ を持つ複素数



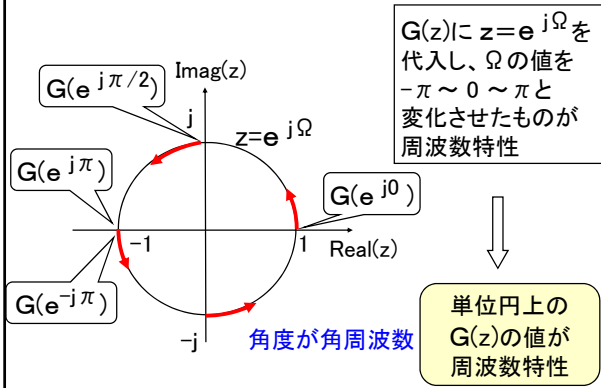
◇ Ω の値によらず、 $|e^{j\Omega}|$ は常に 1

$e^{j\Omega}$ は単位円の上を動く

単位円: 半径が 1 の円



フィルタの周波数特性



伝達関数と周波数特性の例

例) 2つの極と2つの零点とを持った伝達関数

$$G(z) = \frac{(1 - q_1 z^{-1})(1 - q_2 z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})}$$

を考える。

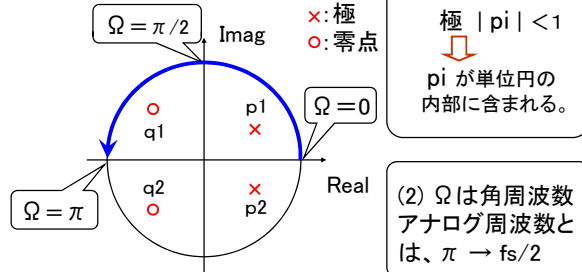
$z = p_1, p_2$ で $G(z) \rightarrow$ 無限大

$z = q_1, q_2$ で $G(z) \rightarrow 0$

極・零点を図上に表すと、

単位円との関連

z-平面



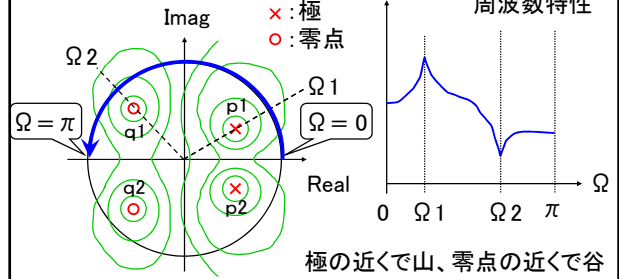
(1) 安定条件
極 $|p_i| < 1$
↓
 p_i が単位円の内部に含まれる。

(2) Ω は角周波数
アナログ周波数とは、 $\pi \rightarrow f_s/2$

$|G(z)|$ の等高線を 図上に重ねると、 \Rightarrow

極・零点と周波数特性

z-平面 $|G(z)|$ の等高線

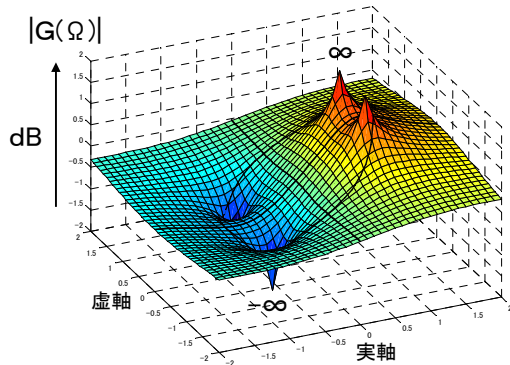


$|G(\Omega)|$ 周波数特性

極の近くで山、零点の近くで谷

周波数特性は極と零点の分布で決定

伝達関数の3次元表示



③ 極と零点に基づくフィルタの特性解析

- (1) フィルタの安定条件
伝達関数の部分分数展開
- (2) 周波数特性の定性的理解
伝達関数の z 平面上表現
- (3) フィルタの分類

極と零点によるフィルタの分類

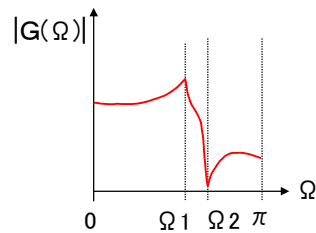
$$1) \quad G(z) = \frac{b_0 \prod_{i=1}^Q (1 - q_i z^{-1})}{1 - \prod_{i=1}^P (1 - p_i z^{-1})} \quad \text{極・零フィルタ (IIR)}$$

$$2) \quad G(z) = \frac{b_0}{1 - \prod_{i=1}^P (1 - p_i z^{-1})} \quad \text{全極フィルタ (IIR)}$$

$$3) \quad G(z) = b_0 \prod_{i=1}^Q (1 - q_i z^{-1}) \quad \text{全零フィルタ (FIR)}$$

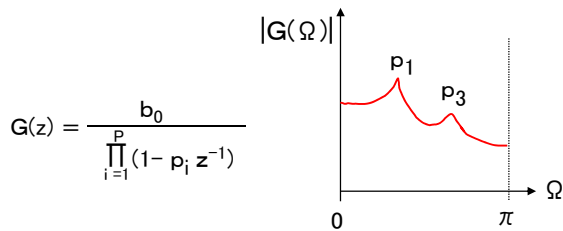
極・零フィルタ

$$G(z) = \frac{b_0 \prod_{i=1}^Q (1 - q_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^P (1 - p_i z^{-1})}$$



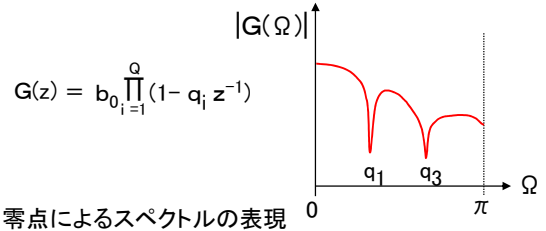
例) 極の周波数 Ω_1 と零点の周波数 Ω_2 とを近づけることで急峻な(遮断特性の良い)フィルタを作ることができる

全極フィルタ



- 極によるスペクトルの表現
- ピークを表現 → 共振系の表現に適合、知覚に適合
- 音声生成のモデル: AR (Auto Regressive) モデル

全零フィルタ (= FIR フィルタ)



- 零点によるスペクトルの表現
- FIR フィルタであるので、**安定性が保証!**
(係数を、どのように定めても発振の危険性が無い)
- 次数を高くすれば急峻なフィルタも作れる
- MA (Moving Average) モデル

③ 極と零点に基づくフィルタの特性解析 (まとめ)

- (1) フィルタの安定条件
すべての極が z 平面の単位円内
- (2) 周波数特性
フィルタの周波数特性は、 z 平面において $G(z)$ の単位円上の値
- (3) フィルタの分類
極・零フィルタ、全極フィルタ、全零フィルタ

(補足) IIR と FIR の比較

- ◇ IIR
(長所) 少ない次数で急峻なフィルタ
(短所) 安定性に注意を払う必要
プログラムが複雑
(用途) 固定的・専用
- ◇ FIR IIR の逆
(長所) 安定性が保障
(短所) 急峻なフィルタは大きな次数
(用途) 実験室、可変フィルタ、適応フィルタ

→ 付録3. Q&A 参照

4. デジタルフィルタ

- ① デジタルフィルタとは
 - ② フィルタの種類と伝達関数
 - ③ 極と零点によるフィルタの特性解析
 - ④ **フィルタの実行**
 - ⑤ フィルタの設計
- *) 信号処理による高周波成分の発生

フィルタの実行

基本的には、差分方程式

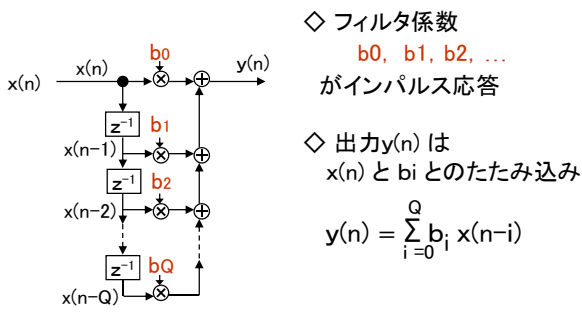
$$y(n) = \sum_{i=1}^P a_i y(n-i) + \sum_{i=0}^Q b_i x(n-i)$$

を、DSPやCPUのプログラミングで実行

(ただし、FIR フィルタにはいくつかの
便利な性質がある)

→ 関連事項も交えて説明する

FIRフィルタとインパルス応答



FIRフィルタのベクトル表現

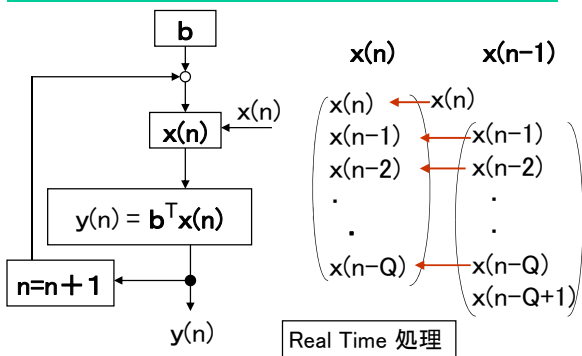
$$y(n) = \sum_{i=0}^Q b_i x(n-i) \iff y(n) = \mathbf{b}^T \mathbf{x}(n)$$

T : 転置

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_Q \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}(n) = \begin{pmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ x(n-2) \\ \vdots \\ x(n-Q) \end{pmatrix}$$

たたみ込みは、 \mathbf{b} と $\mathbf{x}(n)$ の内積演算

FIRフィルタのたたみこみ計算 (フィルタの実行の標準形)



たたみ込みとFFT (=DFT)

たたみ込みは計算量が多い
(時間領域) (周波数領域)
たたみ込み \iff 積

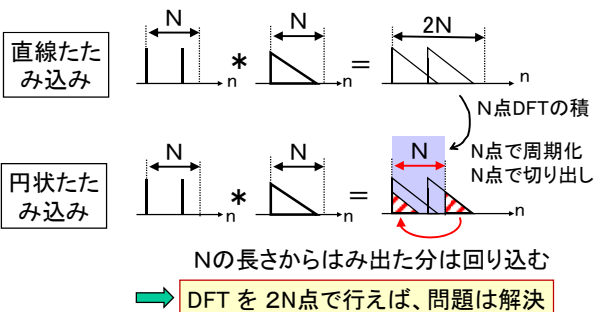
FFTを使って周波数領域で「積」として計算すれば、
計算量は $Q \rightarrow \log_2 Q$ に比例して低減
例) 1000 \rightarrow 10

- ただし、信号にFFTデータ長の遅延が発生する。
- また、DFTスペクトル同士との積には注意が必要である。

DFTの積

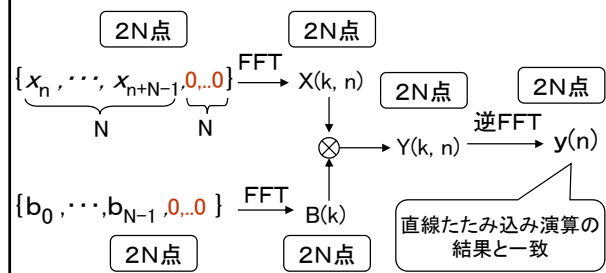
DFTの積は、時間領域では円状(巡回)たたみ込み

\iff FIRフィルタは(直線)たたみ込み



直線たたみ込み(FIRフィルタリング)をFFTで行う手順

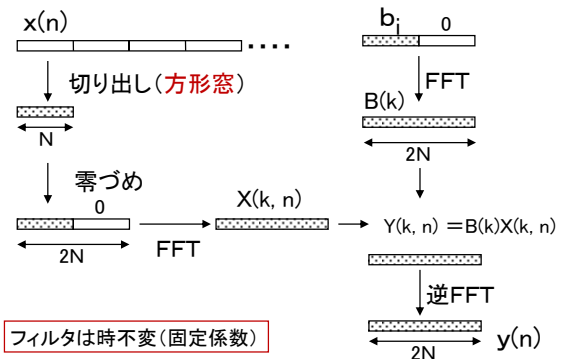
N点の信号 x_n, \dots, x_{n+N-1} と
N点のインパルス応答 b_0, \dots, b_{N-1} とのたたみ込み



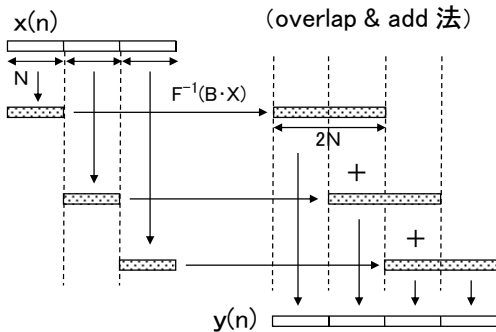
直線状たたみ込みをFFTでできる

DFTの結果(=FFTの結果)の積は円状たたみ込みだが、あらかじめ時間信号にゼロを付加し、長さを2倍しておくことで直線状たたみ込みと同等の結果が得られる

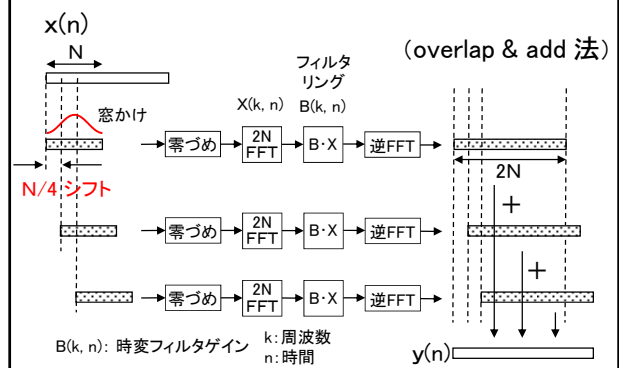
FFTを用いたFIRフィルタの実行(1)



FFTを用いたフィルタの実行(2)



FFTを用いたフィルタの実行(時変フィルタの場合)



時変フィルタの例

Wiener フィルター

(代表的雑音抑圧フィルター)

$$B(k, n) = \frac{P_S(k, n)}{P_S(k, n) + P_N(k, n)}$$

$P_N(k, n)$: 定常雑音のパワースペクトル (実測)

$P_S(k, n)$: 信号のパワースペクトル
(受信信号のパワーから $P_N(k, n)$ を減算して推定)

フィルタの実行(まとめ)

- ◇ 差分方程式のプログラミング実行
- ◇ FIR は、入力と係数のたたみ込みで、FFT を利用すれば、演算量が低減

4. デジタルフィルタ

- ① デジタルフィルタとは
- ② フィルタの種類と伝達関数
- ③ 極と零点によるフィルタの特性解析
- ④ フィルタの実行
- ⑤ フィルタの設計

*) 信号処理による高周波成分の発生

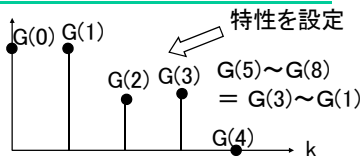
フィルタの設計

- 1) アナログフィルタの設計式を利用
(IIRフィルタ: 双一次変換、など)
- 2) DFTを使った簡易法(FIR)
- 3) 設計ソフト、プログラムを利用
- 4) その他
(特別な注意が必要な、
固定小数点DSP用の IIR フィルタ設計
などは、専門書参照)

簡易法

例) $N=8$ $G(k)$ $G(0)$ $G(1)$ $G(2)$ $G(3)$ $G(4)$ $G(5) \sim G(8)$

メリット:
自由な特性を
設計できる

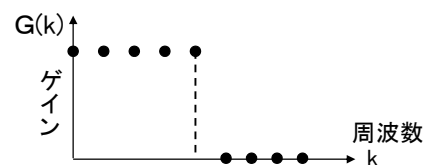


◇ 所望するフィルタの周波数特性を、DFT の値 $G(k)$ として与える。これを 逆DFTして、

$$G(k) \xrightarrow{F^{-1}} g(n)$$
 得られたインパルス応答 $g(n)$ を係数として
 FIR フィルタリングを行う。

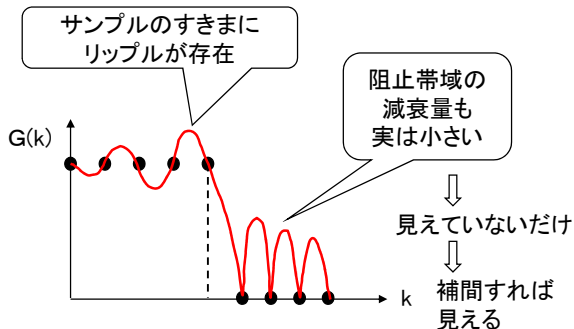
⇨ しかし、このままでは不適切な場合も・・・

勘違い例 (その1)

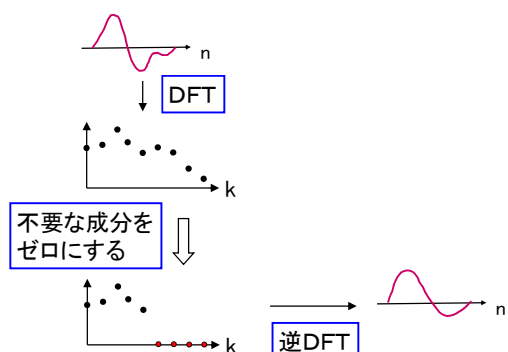


この特性の逆DFTを用いれば、
理想的な低域フィルタになるか？

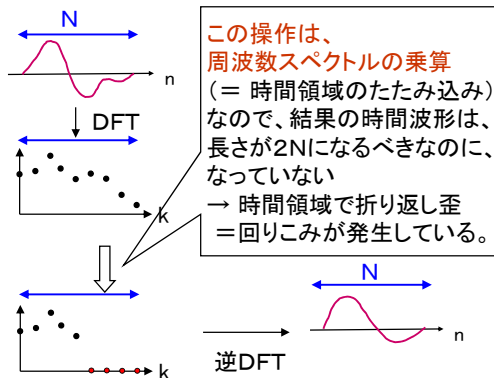
「すきま」の向こうに注意



勘違い例 (その2) 誤ったフィルタ動作



不適切な理由



コメント

短時間スペクトル分析に基づいた信号処理
例えば、雑音除去などの時変フィルタリングを
周波数領域の乗算でおこなう場合には、
この点に注意する必要がある。

必要なら、時間信号の適切な窓掛けや、
フィルタ特性は一度時間に戻して窓をかけてから
利用、などの対策を行う。

その他の設計(実現?)法

- 1) 所望のインパルス応答を実現するフィルタ
→ FIRフィルタの場合は、
所望のインパルス応答をフィルタ係数とすればよい
頭部伝達関数(HRTF)、
室内音響シミュレータ、など
- 2) その他の演算によって得られるフィルタ
逆フィルタなど
(後述)

フィルタの設計(まとめ)

- ◇ 通常は各種設計プログラムの利用が便利
- ◇ 簡易法を用いる場合は、いくつかの注意が必要

4. デジタルフィルタ

- ① デジタルフィルタとは
- ② フィルタの種類と伝達関数
- ③ 極と零点によるフィルタの特性解析
- ④ フィルタの実行
- ⑤ フィルタの設計

***) 信号処理による高周波成分の発生**

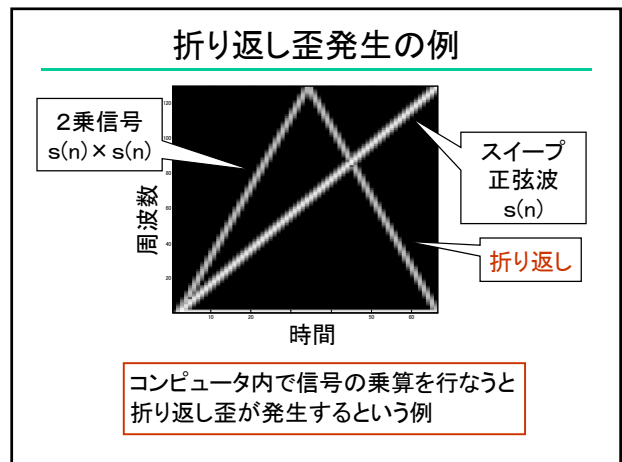
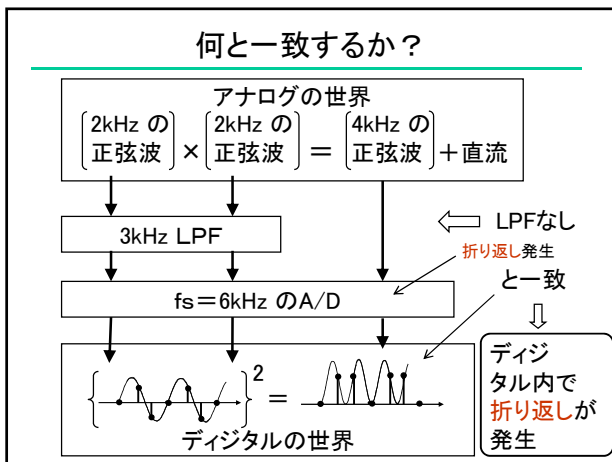
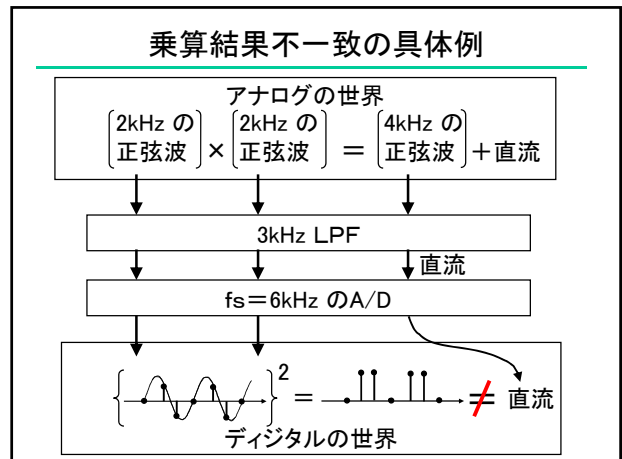
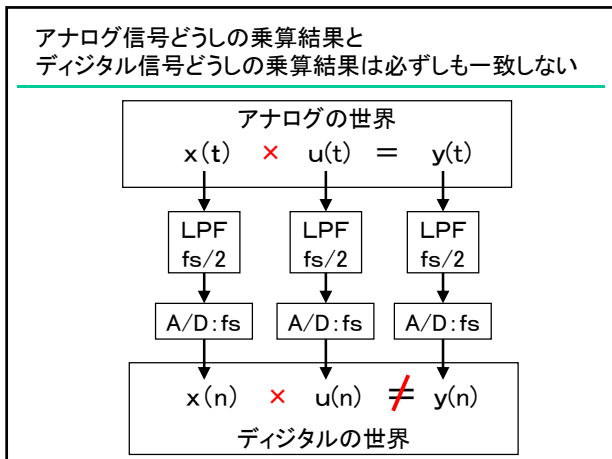
信号と信号の乗算

信号どうしの乗算は、
信号の周波数範囲を拡大する！

- ◇ 正弦波の積

$$\sin 2\pi f_1 t \times \sin 2\pi f_2 t$$

$$= \{\cos 2\pi(f_1 - f_2)t - \cos 2\pi(f_1 + f_2)t\} / 2$$
- ◇ 一般に、
 $a(t)$ に含まれる 上限周波数 f_{ma}
 $b(t)$ に含まれる 上限周波数 f_{mb}
 $a(t) \times b(t)$ に含まれる 上限周波数 $f_{ma} + f_{mb}$
- ◇ 信号自身の乗算は、 f_{max} が 2倍になる



乗算による折り返し歪の発生

折り返し歪は
 ADするとき $fs/2$ 以上の成分が含まれていると発生することは知っている。

しかしそれだけでなく、

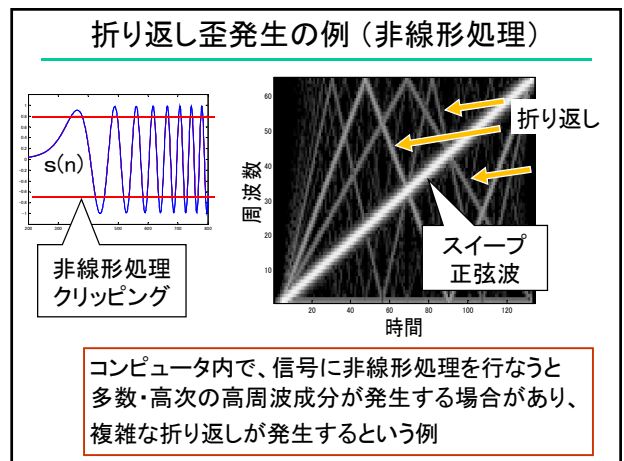
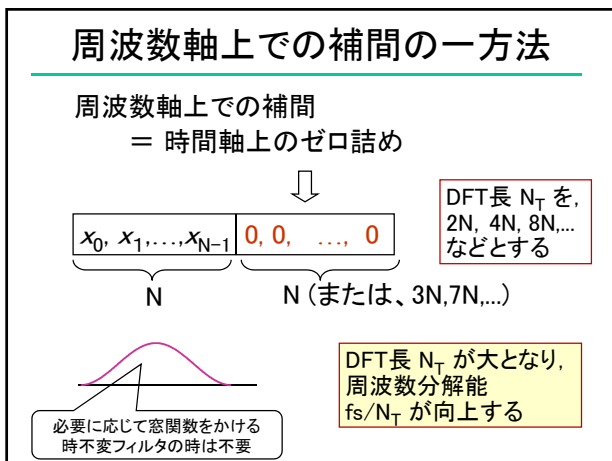
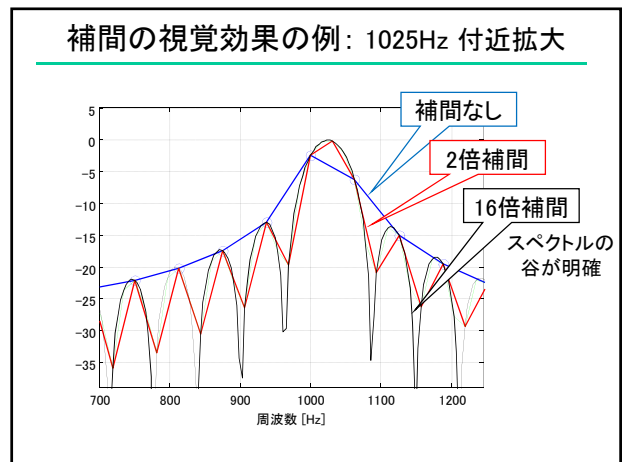
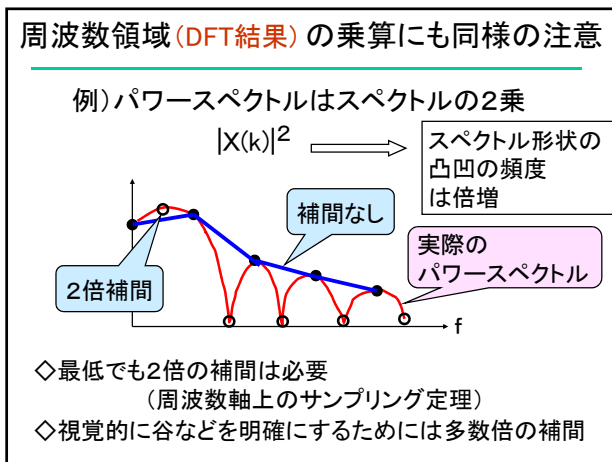
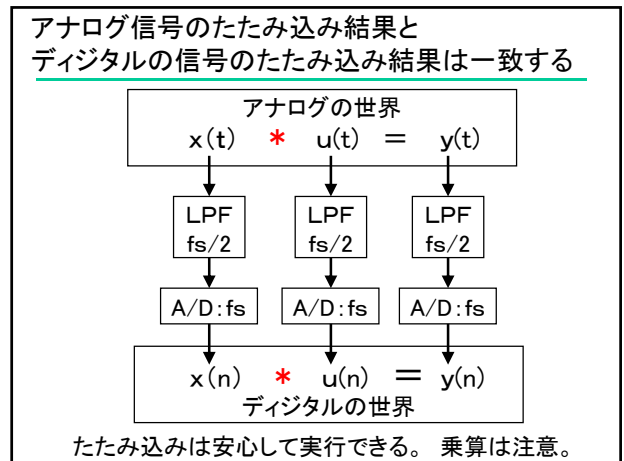
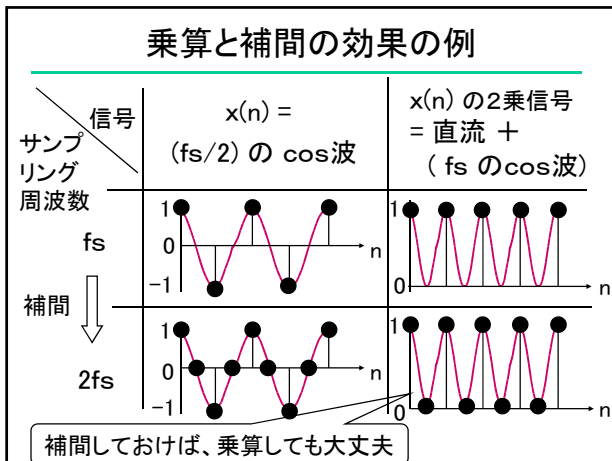
デジタル信号処理(ここでは乗算)した場合にも、折り返し歪が発生する。

⇒ 対策は？

デジタル信号で
 信号どうしの乗算を行う前には補間を！

信号どうしの乗算
 ↓
 信号周波数の増加(最大2倍)
 ↓
 サンプル周波数の見直し
 ↓

2倍の補間を行って
 (サンプル周波数を上げて)
 から乗算



乗算や非線形処理の際の
注意点（まとめ）

デジタル領域で
信号同士、スペクトル同士の乗算や
非線形処理を行うと、
高周波成分が発生して
折り返し歪が発生する。

これを防ぐためには、
あらかじめ、補間を行って、
サンプリング周波数を
上昇させておくことが必要である

講習概要（発展編）

5. 伝達関数による対象系のモデル化
6. インパルス応答の測定法
7. 逆フィルタ
8. 適応フィルタとその応用

信号処理対象のモデル化

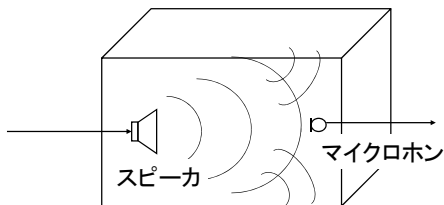
信号処理を行うにあたって、
対象とする系をモデル化し
数式で表現することが必要



音響系を例に説明する

音の伝播の表現方法

スピーカから出た音がマイクロホンにどう伝わるかを、
数式で表現する(モデル化)



(p.118)

波動方程式（古典的表現）

$p(x, y, z, t)$: x, y, z 点における時刻 t の音圧

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right)$$

c : 音速

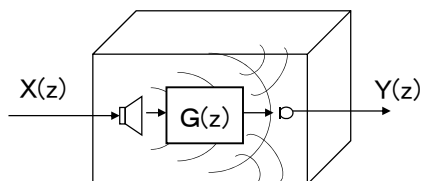
長所: 任意の場所、任意の時刻における音圧を表現

短所: 方程式が解けない

(解は存在するが、簡単な関数で表現できない)

→ 有限要素法

伝達関数（信号処理に適した表現）



「点から点まで」の伝達特性 $G(z)$ で伝搬を表現

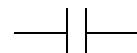
$$Y(z) = G(z)X(z)$$

長所: 複雑な系であっても、測定によって
求められる場合が多い

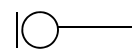
豆知識: マイクロホン記号



スピーカ



コンデンサ



マイクロホン



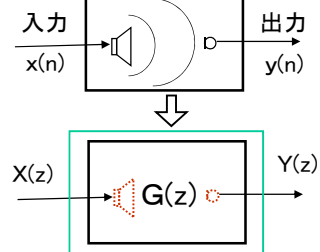
古典的なマイク形状に由来



伝達関数を用いたモデル化の例 (1)

対象となる系の入力と出力に注目して
伝達関数を用いた数式モデル(等価回路)
として記述する。

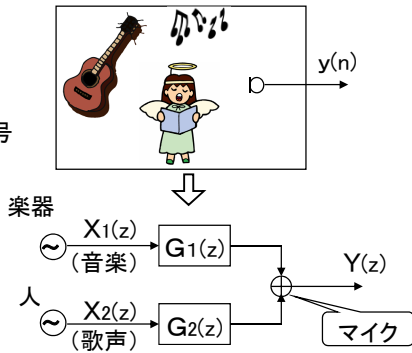
(室内音響系)



(p.121)

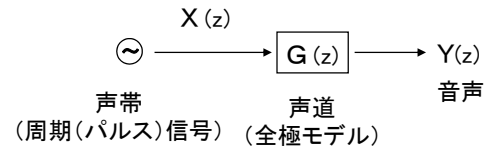
伝達関数を用いたモデル化の例 (2)

音源
⇒ 発振器
空間
⇒ 線形系
⇒ 複数信号
は加算



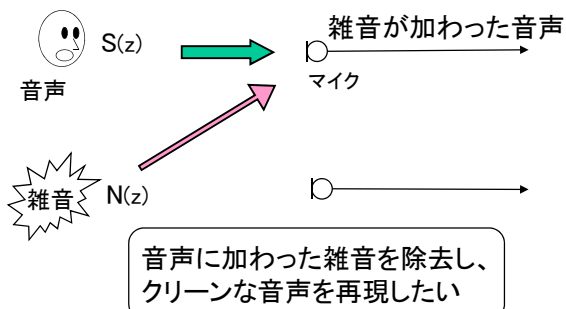
伝達関数を用いたモデル化の例 (3)

(音声生成系)

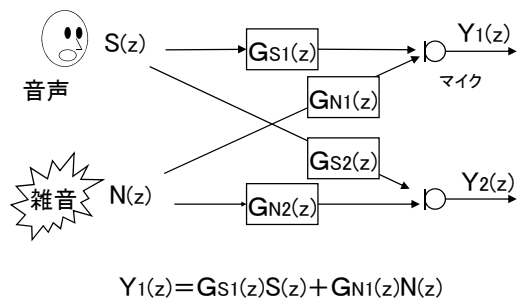


※ 対象や目的に適合したモデルの選定が必要

伝達関数を用いたモデル化の利点の例 — 信号分離問題 —



伝達関数を用いたモデル化



問題の定式化

問題の定式化

$$Y_1(z) = G_{S1}(z)S(z) + G_{N1}(z)N(z)$$

$$Y_2(z) = G_{S2}(z)S(z) + G_{N2}(z)N(z)$$

行列表現

$$\begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{S1}(z) & G_{N1}(z) \\ G_{S2}(z) & G_{N2}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S(z) \\ N(z) \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{G}(z) \mathbf{X}(z)$$

$Y_1(z)$ 、 $Y_2(z)$ は受信信号であるので既知。
 $G(z)$ が既知であれば、 $S(z)$ 、 $N(z)$ を未知数とした連立方程式

信号分離問題の解

$G(z)$ の逆行列、 $G^{-1}(z)$ を用いて解ける

$$\mathbf{X}(z) = \mathbf{G}^{-1}(z)\mathbf{Y}(z)$$

$$\begin{bmatrix} S(z) \\ N(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{S1}(z) & G_{N1}(z) \\ G_{S2}(z) & G_{N2}(z) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \end{bmatrix}$$

◇ モデル化を行うことで、複数のマイクロホンを用いて（形式的には）複数の音源が分離できることがわかる。

◇ ただし、実用的には、次の課題がある。

- 1) $G(z)$ をどのようにして得るか（測るか）？
- 2) $G(z)$ の逆行列は実現可能か（安定か）？

伝達関数の代表的な求め方

インパルス応答

$$g(n) = \{g(0), g(1), g(2), g(3), \dots\}$$

を測定できる場合は、これを z 変換して求める。

$$G(z) = \sum_{n=0}^{L-1} g(n)z^{-n}$$
$$= g(0) + g(1)z^{-1} + g(2)z^{-2} + g(3)z^{-3} + \dots$$

モデル化は必須か？

◇ 近年、Blind (ブラインド) 処理、ニューラルネット適応フィルタ、など、必ずしもモデル化を行わなくても処理効果が得られる方法が提案されている。

◇ しかし、ブラックボックス処理では、性能が十分でないとき、理由がわからず、改善方針がたてられない。（→第8章）

⇒ 常にモデル化を意識することが大切

◇ 相対的な伝達関数で良いことも多い
(マイクロホンアレー処理など)

信号処理対象のモデル化（まとめ）

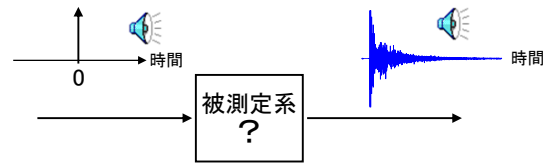
- ◇ 伝達関数を用いて、対象（音響系）をモデル化（等価回路表現）することがデジタル信号処理の第一歩
- ◇ 伝達関数はインパルス応答より得られる
- ◇ ブラインド処理でもモデル化を意識することが重要

6. インパルス応答の測定法

◇ 測定法の概要

- ◇ 測定原理 (測定用信号を選べる場合)
- ◇ 測定用信号
 - ・ TSP 信号: 信号と逆関数、演算量削減法など
 - ・ M系列信号
- ◇ 測定上の注意点 (過大入力による非線形誤差)
- ◇ その他: 同期加算、など

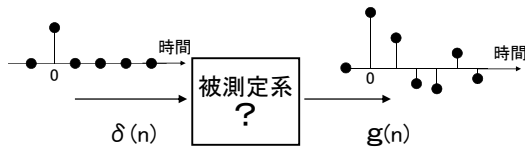
インパルス応答



【定義】インパルス入力に対する系の出力

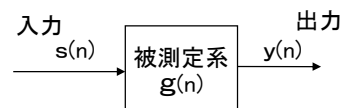
- ◇ 線形系の全ての情報を含む
- ◇ フーリエ変換すると系の周波数特性
- ◇ z 変換すると系の伝達関数

パルス法



- ・ インパルスを入力とし、定義どおりにインパルス応答を測定する方法
- (欠点) 入力信号エネルギーが大きくてできないので、SN比が悪い

インパルス応答測定法の概要



被測定系の入出力からインパルス応答 $g(n)$ を測定

- 1) 入力 $s(n)$ を自由に設定できる場合
エネルギーの大きい信号 (TSP、M系列など) の利用
- 2) 入力 $s(n)$ は制御できない場合
クロススペクトル法、適応フィルタの利用

(p.158)

望ましい 測定用信号の条件

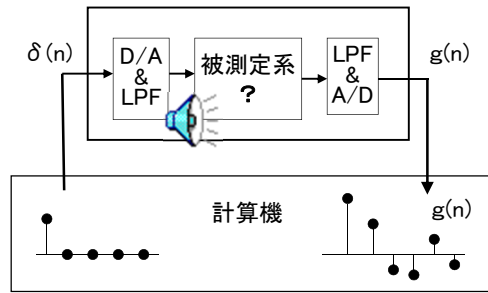
- 1) 大きなエネルギーを持つ (継続時間が長い) 信号
→ SN比向上
- 2) ただし、ある特定の時間にエネルギーが集中すると、系の非線形が発生するので、
ほぼ一定の振幅で持続する信号
(波高率 (Crest factor) の小さな信号)
- 3) 測定対象となる周波数成分を、
欠落無く含んでいる信号
- 4) 扱いやすく、性質の良い信号

望ましい 測定用信号の例

- 1) 掃引正弦波 (Swept Sine Signal)
 - ・ 直線掃引 (周波数の遅れ時間が周波数に比例)
TSP (Time Stretched Pulse) [鈴木、浅野]
 - ・ 対数掃引
(周波数の遅れ時間が周波数の対数に比例)
ピンクTSP [藤本] (Log-TSP、Log-SS)
 - ・ 背景雑音のスペクトルに応じた掃引 [守谷、金田]
- 2) 擬似ランダム雑音
 - ・ M系列
 - ・ 有色擬似雑音

測定原理は共通

(注意) 計算機から見た測定結果



測定結果には、AD, DA の LPF の特性も含まれる

6. インパルス応答の測定法

◇ 測定法の概要

◇ 測定原理 (測定用信号を選べる場合)

◇ 測定用信号

- ・ TSP 信号: 信号と逆関数、演算量削減法など
- ・ M系列信号

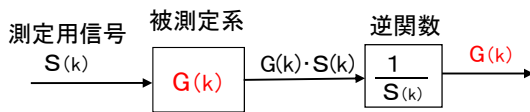
◇ 測定上の注意点 (過大入力による非線形誤差)

◇ その他: 同期加算、など

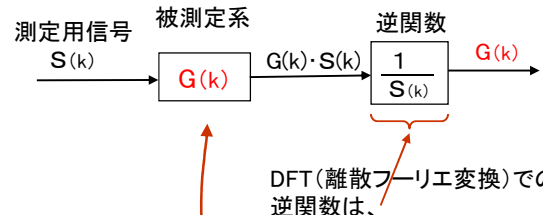
インパルス応答測定原理

インパルス応答 $g(n)$ のフーリエ変換である周波数特性 $G(k)$ を求める問題と考える

k : DFT 離散周波数



物理系でのたたみ込みへの要求

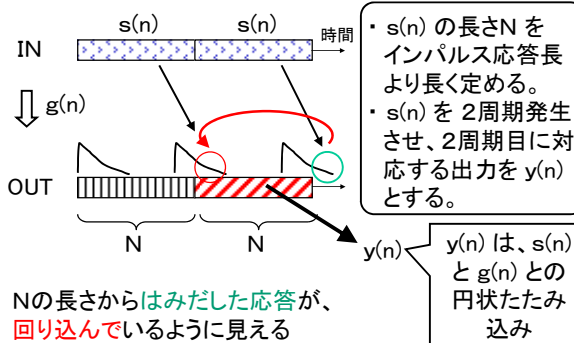


DFT (離散フーリエ変換) での逆関数は、円状たたみ込みが前提

なので、この部分も円状たたみ込みであることが必要

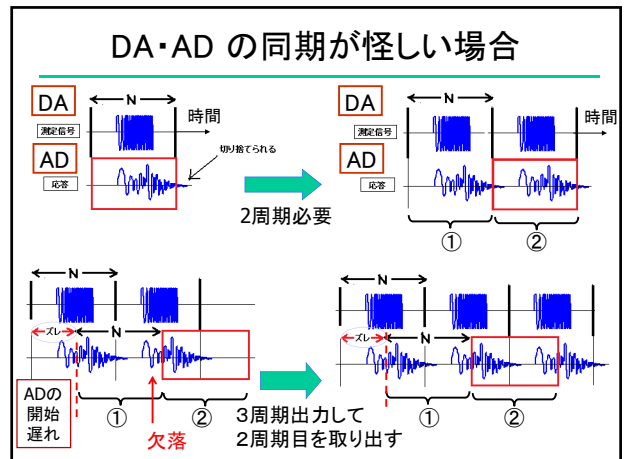
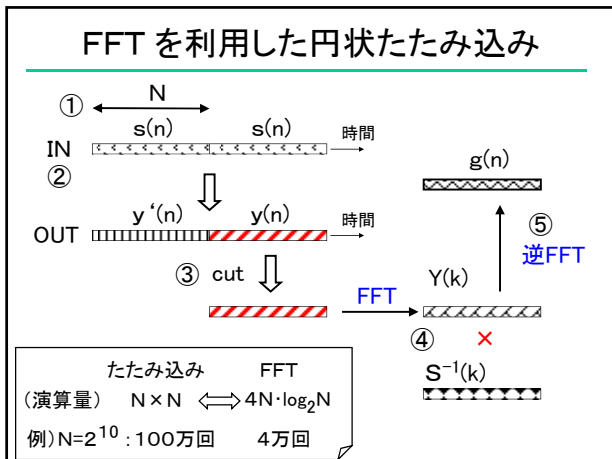
PCで計算するので、DFTが前提

アナログ世界 (現実の系) で円状たたみ込みを実行するための工夫

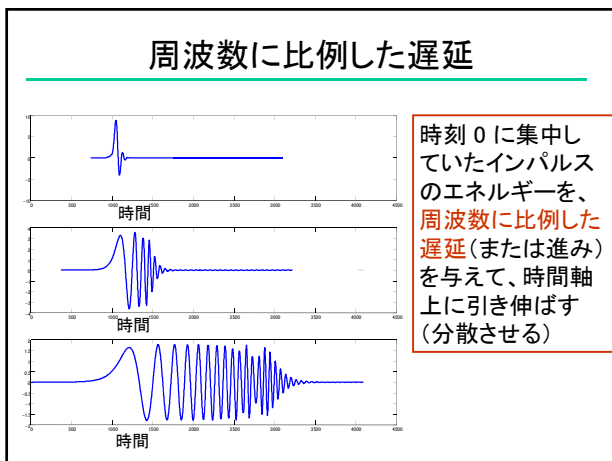
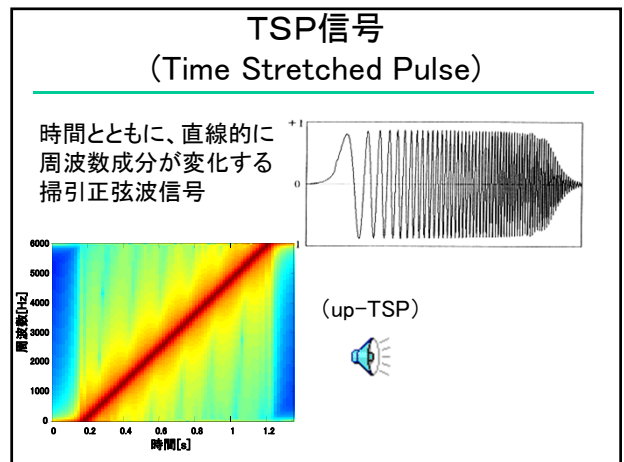


インパルス応答測定の手順

- ① 測定用信号の長さ N をインパルス応答より長く定めて、
- ② 測定用信号 $s(n)$ を2周期入力する。
- ③ その時の出力 $y(n)$ の第2周期目を切り出し、
- ④ DFT した後、 $S(k)$ (測定用信号のDFT) で割り算をし、
- ⑤ 逆DFT すれば、インパルス応答 $g(n)$ が得られる。



- ### 6. インパルス応答の測定法
- ◇ 測定法の概要
 - ◇ 測定原理 (測定用信号を選べる場合)
 - ◇ 測定用信号
 - ・ 掃引正弦波: TSP 信号 (直線掃引)
 - ・ 疑似雑音: M系列信号
 - ◇ 測定上の注意点 (過大入力による非線形誤差)
 - ◇ その他: 同期加算、など



遅延の周波数表現

$$\int x(t) e^{-j2\pi ft} dt = X(f)$$

$$\int x(t-\tau) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi f\tau} X(f)$$

τ の遅延操作 $\rightarrow e^{-j2\pi f\tau}$

- ◇ 周波数 f に比例した遅延 $\tau(f) = af$ (a : 定数) を与える周波数操作は、
 $\rightarrow e^{-j2\pi af^2}$
- ◇ インパルスの周波数スペクトル (=1) に対してこの周波数操作をした信号のスペクトルは、
 $\rightarrow e^{-j2\pi af^2}$

TSP信号の定義式

◇ 周波数 k の二乗に比例した位相成分

(up-TSP)

$$S_{up}(k) = \begin{cases} \exp(-jak^2) & k = 0, 1, \dots, N/2 \\ \exp\{ja(N-k)^2\} & k = N/2+1, \dots, N-1 \end{cases}$$

$$a = m\pi(2/N)^2 \quad m: \text{整数}$$

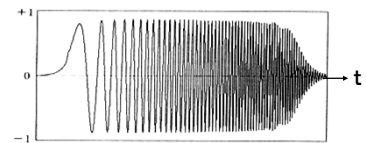
(dwn-TSP)

$$S_{dwn}(k) = \begin{cases} \exp(jak^2) & k = 0, 1, \dots, N/2 \\ \exp\{-ja(N-k)^2\} & k = N/2+1, \dots, N-1 \end{cases}$$

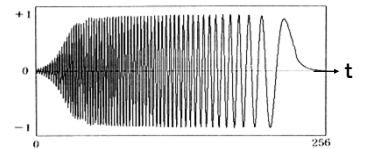
(p.160~)

Up & Down TSP

(up-TSP)



(dwn-TSP)



TSP信号の逆関数

(up-TSP) $S_{up}(k) = \exp(-jak^2)$

と

(dwn-TSP) $S_{dwn}(k) = \exp(jak^2)$
を乗算すると、全ての周波数 k で 1 となる。

$$\Downarrow$$

$$\delta(n)$$

$$\Downarrow$$

(up-TSP) と (dwn-TSP) とは、
お互いに逆関数の関係

TSP は逆関数の 直線たたみ込みが可能

鈴木、浅野らの設計による TSP 信号は、
波形の収束性が良いので、円状たたみ込みの
代わりに、直線たたみ込みを行っても、
誤差が小さい。

→ TSP 信号は2回鳴らさなくても良い

(録音は1周期+インパルス応答長分必要)

参考文献: [4][5]

6. インパルス応答の測定法

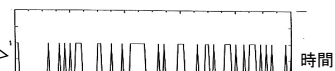
- ◇ 測定法の概要
- ◇ 測定原理 (測定用信号を選べる場合)
- ◇ 測定用信号
 - ・ TSP 信号: 信号と逆関数、演算量削減法など
 - ・ M系列信号
- ◇ 測定上の注意点 (過大入力による非線形誤差)
- ◇ その他: 同期加算、など

M系列信号

M系列 (例: {0, 1, 0, 1, 1, 0, ...}) の 0 と 1
をそれぞれ +1 と -1 に対応させた信号。

DA後

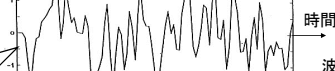
ランダムな
1, -1 信号



±1しかとらない特
殊信号のようだが

LPF後

ほぼ
白色雑音



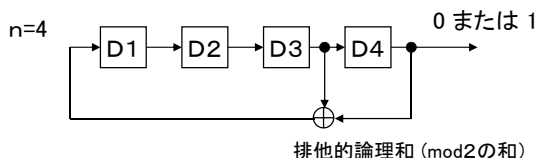
波高率も
1を上回る

M系列の作り方 (Maximum length sequence)

n 次のM系列とは、
2ⁿ-1の周期を持つ0と1のランダム系列

◇作り方

0か1の値を持つn段のシフトレジスタの最終段を含む適切な段からの出力を排他的論理和して、入力にフィードバック。



M系列信号による測定

M系列信号 $m(n)$ の長さ N を
インパルス応答より長く定めて、
M系列信号 $m(n)$ を2周期入力した時の出力 $y(n)$ の第2周期目と、 $m(n)$ の逆関数 $m(-n)$ とを、
円状たたみ込みすれば、インパルス応答 $g(n)$ が得られる。

円状たたみ込み → アダマール変換を利用

参考文献のリストが掲載されている文献：
金田、“M系列を用いたインパルス応答測定...”
日本音響学会誌、52巻10号、(1996.10)

6. インパルス応答の測定法

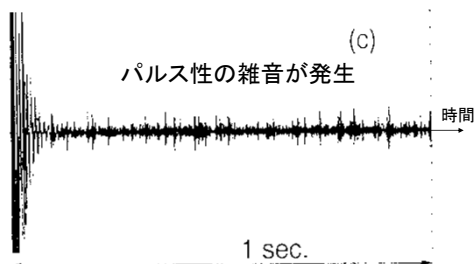
- ◇ 測定法の概要
- ◇ 測定原理 (測定用信号を選べる場合)
- ◇ 測定用信号
 - ・ TSP 信号: 信号と逆関数、演算量削減法など
 - ・ M系列信号
- ◇ 測定上の注意点 (過大入力による非線形誤差)
- ◇ その他: 同期加算、など

測定上の注意点

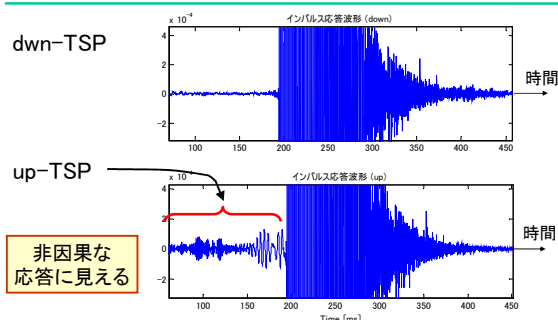
— 過大入力による非線形誤差 —

- SN比を稼ごうとして、入力が過大になると、非線形誤差が発生する。(特にスピーカ)
- ・ M系列法では、パルス性雑音が発生し特に時間後半で目立つ
 - ・ up-TSP では、非因果(主応答の前)の波形として現れる
- 対策: スピーカレベルの低減、
測定系に含まれる非線形要素の点検

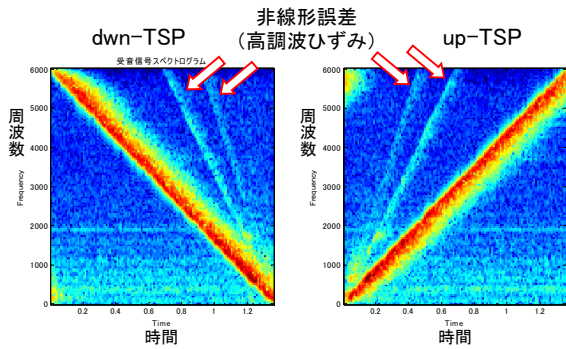
非線形誤差の例(M系列法)



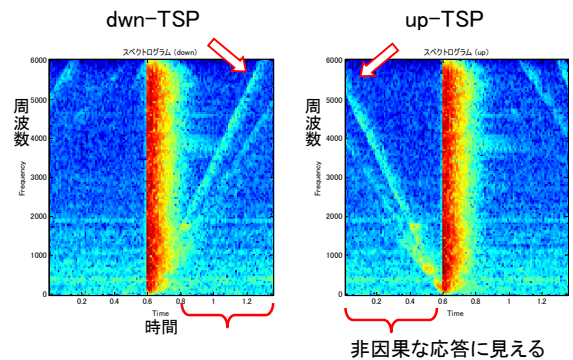
非線形誤差の例(TSP法)



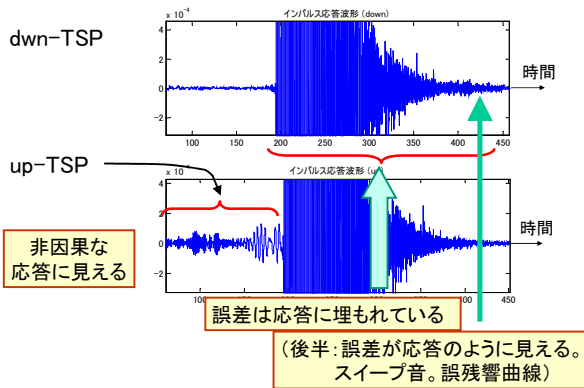
TSP 応答に現れる非線形誤差



インパルス応答における非線形誤差



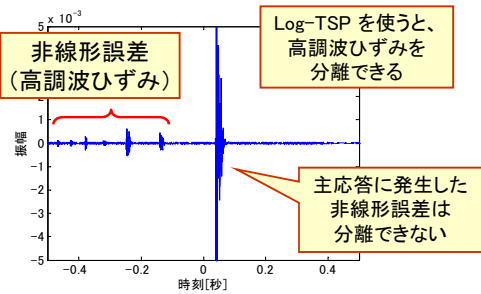
非線形誤差の例 (TSP法)



TSPと非線形誤差

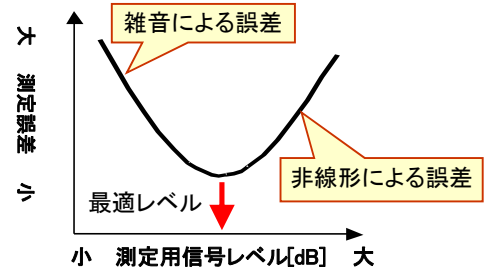
- dwn-TSP では、
インパルス応答の中に非線形誤差が含まれ、
目立たない。用途や誤差の大きさによっては、
良い場合もある。
- up-TSP では、
- ・インパルス応答の負の時間方向に非線形誤差が出現
 - ・高調波ひずみがインパルス応答本体に影響しない
→ 残響曲線にも影響しない
 - ・非線形誤差が目視できるので、**影響のない**と考えられるまで信号レベルを小さくして利用、が良いと思われる。

Log (ピンク)-TSP信号



藤本, "低域バンドでのSN比改善を目的としたTSP信号に関する検討,"
2000年春季音響学会講演論文集 pp. 555-556 (2000.3).

測定用信号レベルと測定誤差



波形、スペクトログラムによる誤差評価

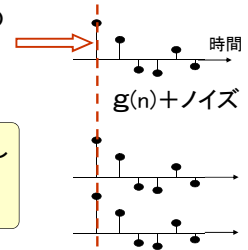
6. インパルス応答の測定法

- ◇ 測定法の概要
- ◇ 測定原理 (測定用信号を選べる場合)
- ◇ 測定用信号
 - ・ TSP 信号: 信号と逆関数、演算量削減法など
 - ・ M系列信号
- ◇ 測定上の注意点 (過大入力による非線形誤差)
- ◇ その他: 同期加算、など

同期加算

SN比の改善に良く利用される手法

測定したインパルス応答の
時間軸を合わせて平均化



ランダムな雑音成分が減衰し
N回の平均で、SN比を
 $10\log_{10}(N)$ [dB] 改善

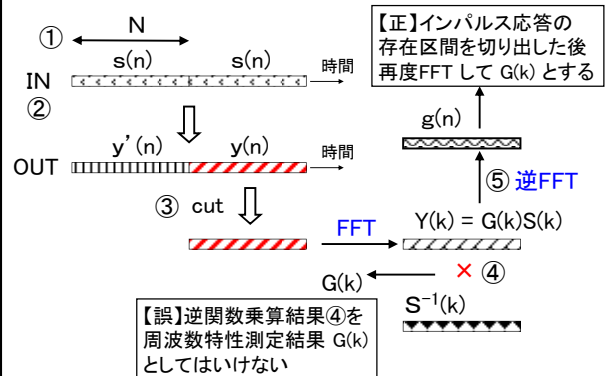
- ・ 時不変非線形による誤差には効果がない
- ・ 信号長を長くすることのトレードオフ

(p.159)

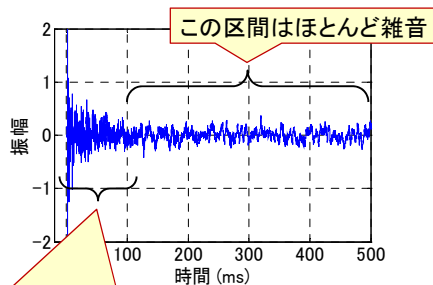
入力が制御できない場合の測定法

- ◇ クロススペクトル法(省略)は
経験とカンが必要
- ◇ 多少誤差があっても良いなら、
適応フィルタ (後述) の利用が簡便

最後に (時々見る間違い)



インパルス応答の切り出し



インパルス応答の存在区間を切り出して
DFTして、周波数特性を求める

インパルス応答の測定(まとめ)

- ・ 逆関数と円状たたみ込みを利用して
インパルス応答を計測する。
- ・ 性質の良い測定用信号として、
TSP や M系列が用いられる。
- ・ 過大入力による非線形誤差には
注意が必要である。
(同期加算でも低減できない)

今後の課題

- ・ 各測定用信号の長・短所の比較検討
- ・ 目的に応じた測定用信号、測定手順の選択指針作成
- ・ ノートパソコンなどで質のよいインパルス応答測定ができるような環境作り、ノウハウの蓄積、開示。

追加情報

音響学会技術講習会

「音響インパルス応答計測の基礎」

2014年 8月22日 開催 の

・ pdf 資料

・ 参考プログラム

が、ホームページからダウンロードできます

7. 逆フィルタ

◇ 逆フィルタとは

- ◇ DFT の逆特性について
- ◇ 安定条件
- ◇ 近似的実現方法
- ◇ 具体的計算方法
- ◇ 多入出力形逆フィルタ

逆フィルタとは？

系を通ったことで変形した信号を
元に戻す操作

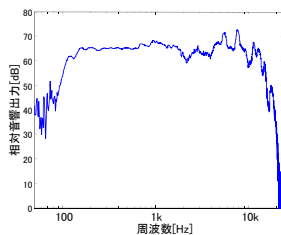


→ 完全に元に戻す必要はあるか？

オーディオ機器の特性

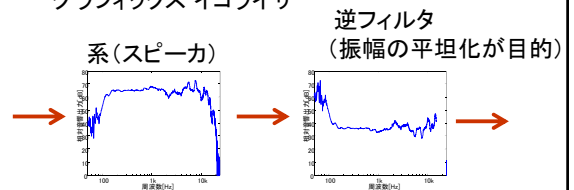
オーディオ機器の特性の大半が
振幅(大きさ)一周波数特性で表されている

例) スピーカ特性 (振幅が平坦なら良とされる)



振幅の逆フィルタ

例) オーディオ イコライザ
グラフィックス イコライザ

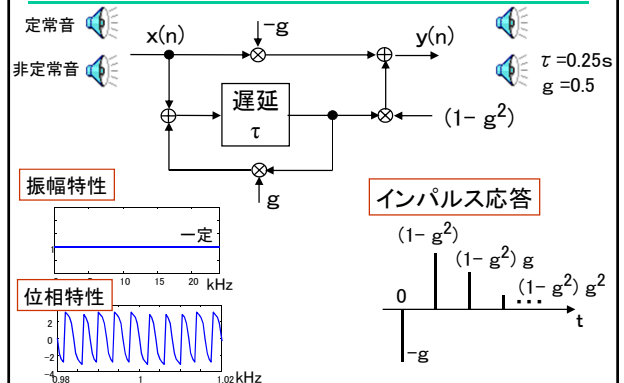


振幅スペクトルの補正を行えば十分か？

聴覚と位相特性 (詳しく言えば)

- ・ 定常信号には位相が影響しない。
- ・ **しかし**、非定常な信号に対しては、位相特性の違いは、聴覚的に検知できる

「Colorless Reverberator」 by M. Schroeder



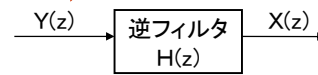
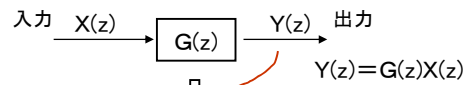
望ましい逆フィルタ

- ・ (いわゆる)イコライザ
 - ・ グラフィックイコライザ
- 振幅の補正

残響などの波形の変形は
位相特性が影響するため復元できない

振幅特性・位相特性を含めた
逆特性を持つフィルタ(正式な逆フィルタ)
が必要

逆フィルタの表現



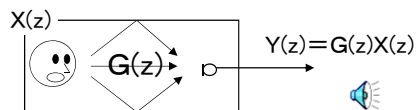
出力Y(z) から 入力X(z) を復元するフィルタ

$$H(z) = 1/G(z)$$

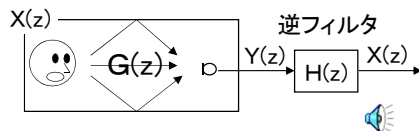
$$H(z)Y(z) = H(z)G(z)X(z) = X(z)$$

(p.124~)

逆フィルタの使用例 (1)



伝達系で変形した信号 Y を元の信号 X に戻す

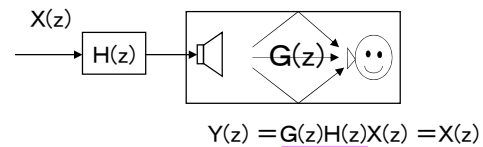


$$H(z)Y(z) = (1/G(z))G(z)X(z) = X(z)$$

使用例 (2) (伝送系の影響を受けない再生)



所望の信号Xが再生できるよう、あらかじめフィルタリング



$$Y(z) = G(z)H(z)X(z) = X(z)$$

1

7. 逆フィルタ

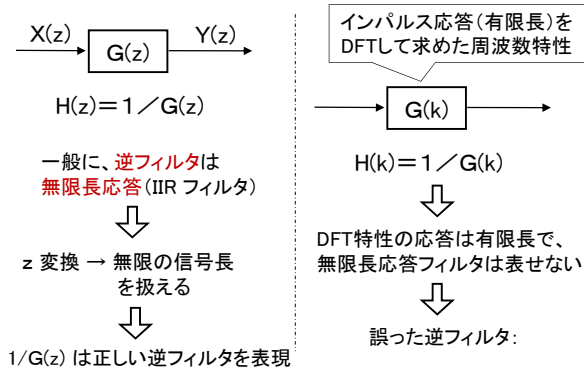
- ◇ 逆フィルタとは
- ◇ DFT の逆特性について
- ◇ 安定条件
- ◇ 近似的実現方法
- ◇ 具体的計算方法
- ◇ 多入出力形逆フィルタ

DFTで逆フィルタが作れるか？

- ・ 系のインパルス応答 $g(n)$
 $g(n) = 0 \quad n > N$
- ・ N点DFT $g(n) \Rightarrow G(k)$ (周波数特性)
- ・ 逆数 $G(k)^{-1} = 1/G(k)$ (逆特性)
- ・ 逆DFT $G(k)^{-1} = g(n)^{-1}$

➡ 逆フィルタができた？

z 変換・DFT と逆フィルタ



DFT 周波数特性の逆数 $1/G(k)$ の意味

$$H(k) = \frac{1}{G(k)}$$

- $k=1,2,\dots,N$ の離散周波数点でのみ逆特性を持つ
- $H(k)$ を逆DFTしたN点の時間応答 $h(n)$ は、本来は無限長である逆フィルタのインパルス応答をN個に圧縮(円状折り返し)したもの。
- ただし、円状たたみこみに対しては逆フィルタとなる (=入力が整数時間の周期を持つ場合)

DFT 周波数特性の逆数 (まとめ)

DFT 周波数特性の逆数は、正しい逆フィルタとはならない



正しい逆フィルタは z変換で表される

$$H(z) = 1/G(z)$$

問題点: 安定性

注) うまく作れば、近似的なDFT逆フィルタは作れる場合もある(後述)

7. 逆フィルタ

- ◇ 逆フィルタとは
- ◇ DFT の逆特性について
- ◇ 安定条件
- ◇ 近似的実現方法
- ◇ 具体的計算方法
- ◇ 多入出力形逆フィルタ

逆フィルタの安定条件

$$G(z) = \frac{b_0 \prod_{i=1}^Q (1 - q_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^P (1 - p_i z^{-1})}$$

逆フィルタ

$$H(z) = \frac{\prod_{i=1}^P (1 - p_i z^{-1})}{b_0 \prod_{i=1}^Q (1 - q_i z^{-1})}$$

逆フィルタでは、零点と極が入れ替わる

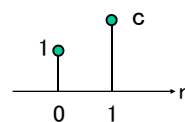
よって、 $G(z)$ の零点 q_i が全て単位円内にある場合、 $|q_i| < 1$ 逆フィルタは安定

最小位相系と呼ぶ

最小位相系でない、とは(1)

最小位相系でないのは、どのような時?

- ◇ $G(z)$ の零点 q_i が $|q_i| > 1$ (単位円の外) の時、信号エネルギーの遅れがある。

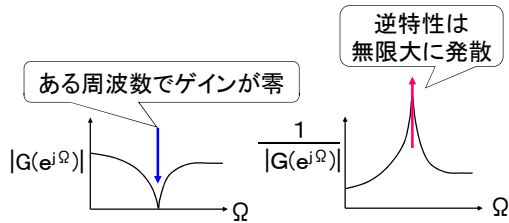


- 例えば、 $(1 + c \cdot z^{-1})$ のインパルス応答(左図)
- 零点は $-c$ なので、 $|零点| > 1 \Rightarrow |c| > 1 \Rightarrow$ 信号エネルギーの主要部が遅れる。

遅れを回復する事(=時間を進める事)はできない。

最小位相系でない、とは (2)

- ◇ $G(z)$ の零点 q_i が $|q_i|=1$ の時。単位円上の零。
→ 周波数特性上の零がある



(p.129)

7. 逆フィルタ

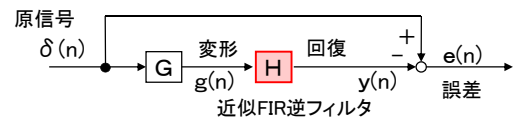
- ◇ 逆フィルタとは
- ◇ DFT の逆特性について
- ◇ 安定条件
- ◇ 近似的実現方法
- ◇ 具体的計算方法
- ◇ 多入出力形逆フィルタ

逆フィルタの近似的実現

- 多くの伝達系は非最小位相系
- 安定な逆フィルタは存在しない
- しかし、非最小位相系での信号回復の要求は多い
- **安定性の保証されたFIRフィルタで逆フィルタを近似的に実現**

(p.129)

最小2乗原理による逆フィルタの近似



原信号を良好に回復

- 逆フィルタの出力 $y(n)$ と原信号 $\delta(n)$ との誤差 $e(n)$ のエネルギー J を最小にするような FIR フィルタを求める。

$$J = \sum_n \{\delta(n) - y(n)\}^2 = \sum_n \{\delta(n) - \sum_i g(n-i) h_i\}^2$$

$g(n), h_i$: G, H のインパルス応答

近似逆フィルタの導出式

$$J = \sum_n \{\delta(n) - y(n)\}^2 = \sum_n \{\delta(n) - \sum_i g(n-i) h_i\}^2$$

この J を最小とするような近似 FIR 逆フィルタ H のフィルタ係数 h_i を求める。

J は、 h_i の 2 次関数であるので、 J を各 h_i で偏微分して 0 と置いた 次の連立方程式を解くことで求まる。

$$\frac{\partial J}{\partial h_0} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial h_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial J}{\partial h_{Lh}} = 0$$

- ◇ ただし、実用的には、後で述べる行列算法や、適応フィルタの利用 (低演算量) が便利

近似的逆フィルタの問題点

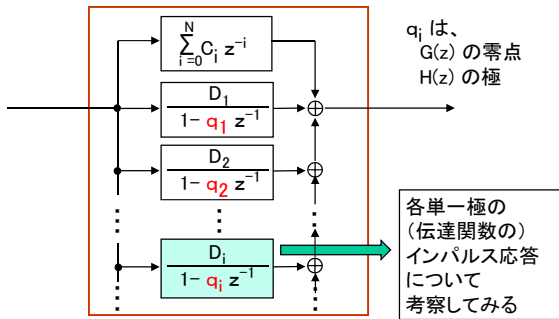
不良な逆フィルタをそのまま近似しても良い結果は得られない。

対策

- (1) 遅延の付加
- (2) 雑音の付加

フィルタの応答は単一極の応答の和

逆フィルタ $H(z) = 1/G(z)$



分数多項式を多項式に展開する

$\frac{1}{1+x}$ (その1) (べき級数) (その2)

$$1+x \overline{) 1}$$

$$\underline{1+x}$$

$$-x$$

$$\underline{-x-x^2}$$

$$x^2$$

$$\underline{x^2+x^3}$$

$$-x^3$$

$$\underline{-x^3+x^4}$$

$$x+1 \overline{) 1}$$

$$\underline{1+x^{-1}}$$

$$-x^{-1}$$

$$\underline{-x^{-1}-x^{-2}}$$

$$x^{-2}$$

$$\underline{x^{-2}+x^{-3}}$$

$$-x^{-3}$$

2種類の展開方法がある

単一極のインパルス応答 その1

$H(z) = \frac{1}{1-q_i z^{-1}}$

伝達関数の級数展開の係数がインパルス応答

逆z変換に相当

インパルス応答は $\{1, q_i, q_i^2, q_i^3, \dots\}$

$$\frac{1}{1-q_i z^{-1}} = 1 + q_i z^{-1} + q_i^2 z^{-2} + q_i^3 z^{-3} + \dots$$

$$\frac{1}{1-q_i z^{-1}} = \frac{1}{q_i z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - (1/q_i)z} = \frac{1}{q_i z^{-1}} (1 + (1/q_i)z + (1/q_i)^2 z^2 + \dots)$$

$$= \frac{1}{q_i} z + \frac{1}{q_i^2} z^2 + \frac{1}{q_i^3} z^3 + \dots$$

単一極のインパルス応答 その2

$H(z) = \frac{1}{-q_i z^{-1} + 1}$

負の時間

インパルス応答は $\{\dots -1/q_i^3, -1/q_i^2, -1/q_i, 0, \dots\}$

$$\frac{1}{-q_i z^{-1} + 1} = \frac{1}{1 - (1/q_i)z} = 1 + (1/q_i)z + (1/q_i)^2 z^2 + \dots$$

$$= \frac{1}{(1/q_i)^2 z^2} \cdot \frac{1}{1 - (1/q_i)^2 z^2} = \frac{1}{(1/q_i)^2 z^2} (1 + (1/q_i)^2 z^2 + \dots)$$

$$= \frac{1}{(1/q_i)^2} z^{-2} + \frac{1}{(1/q_i)^4} z^{-4} + \dots$$

1つの単一極は2種類のインパルス応答を持つ

$H(z) = \frac{1}{1-q_i z^{-1}}$

z^{-1} の級数展開と、 z の級数展開

因果性応答

時間応答 $(\dots, 0, 0, 0, 1, q_i, q_i^2, q_i^3, \dots)$ に対応

時刻 0

非因果性応答

時間応答 $(\dots, -1/q_i^3, -1/q_i^2, -1/q_i, 0, 0, 0, \dots)$ に対応

時刻 0

単一極のインパルス応答のまとめ

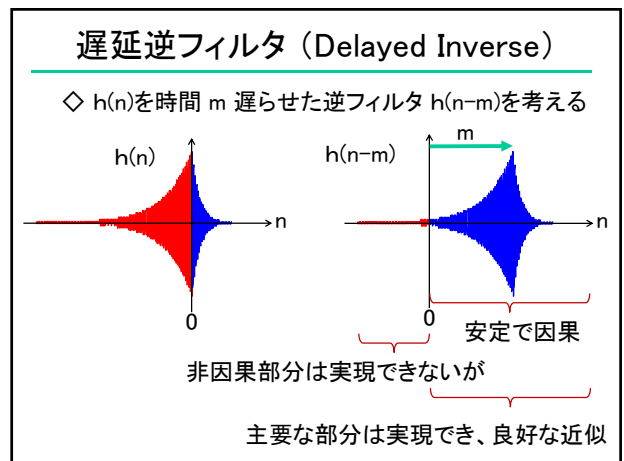
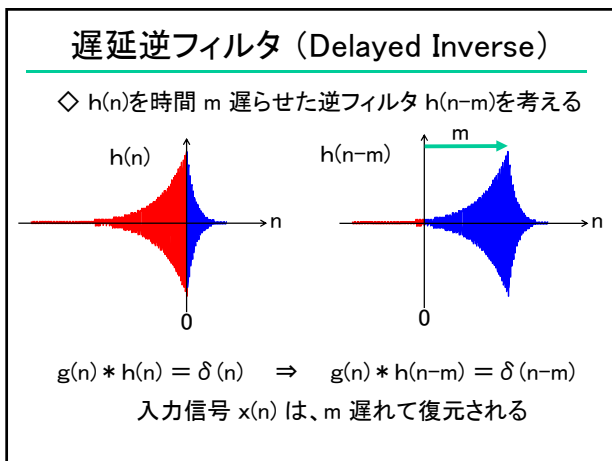
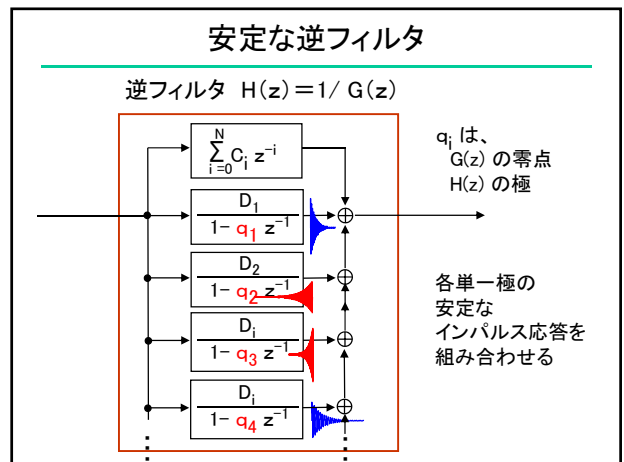
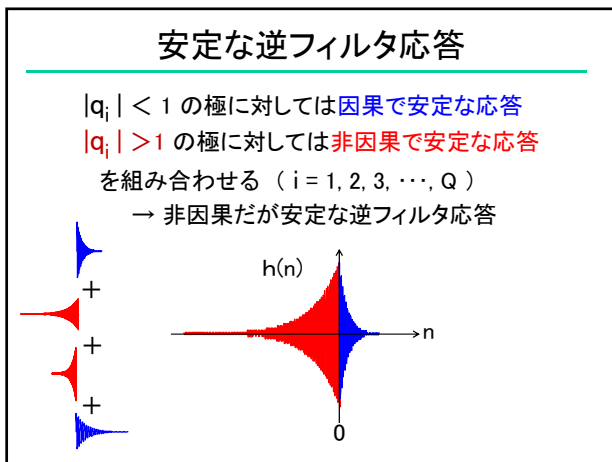
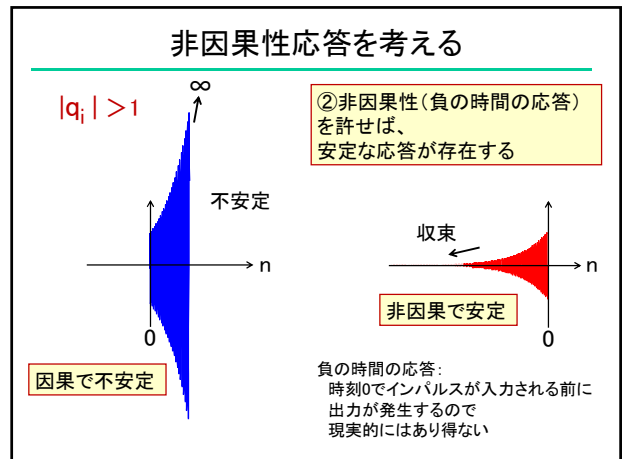
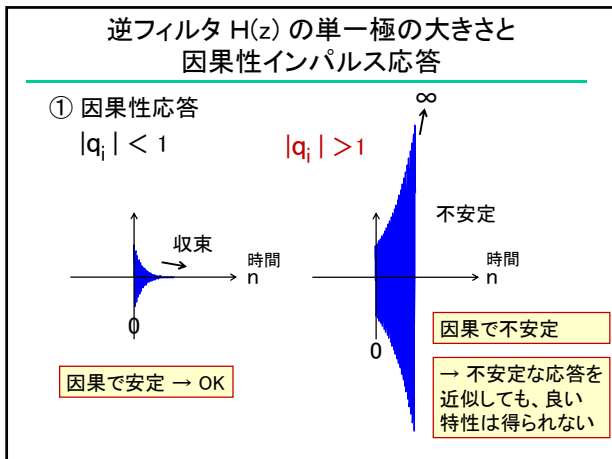
$H(z) = \frac{1}{1-q_i z^{-1}}$

①因果性応答 $(\dots, 0, 0, 0, 1, q_i, q_i^2, q_i^3, \dots)$

時刻 0

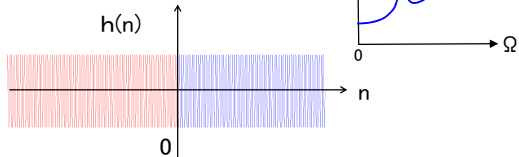
②非因果性応答 $(\dots, -1/q_i^3, -1/q_i^2, -1/q_i, 0, 0, 0, \dots)$

	①因果性応答	②非因果性応答
$ q_i < 1$	安定	不安定
$ q_i > 1$	不安定	安定

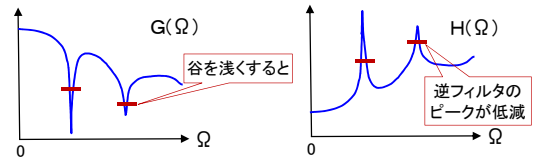


単位円に近い極を持つ場合の応答

$|q_i|$ が 1 に近い場合: 単位円付近
 → $G(z)$ の周波数応答の谷に対応
 → 逆フィルタ $H(z)$ は、鋭い山の特性
 → $H(z)$ のインパルス応答 $h(n)$ は、
 安定 ($|q_i| < 1$) であっても、
 長時間継続する不良な応答

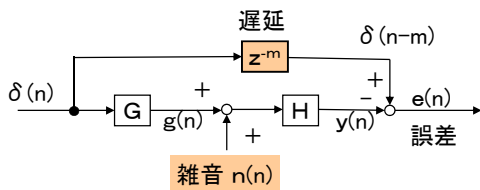


簡便な対策は周波数特性の谷をうめる



目的に応じてさまざまな具体的方法が考えられるが、
 最も簡便な方法は、谷をうめることである。
 具体的には、 $G(z)$ の出力に雑音などを付加する。
 その結果、 $G(z)$ の周波数応答の谷が、見かけ上、上昇する。

良好な近似逆フィルタを得るための ブロック図



上図において $J = \sum_n e^2(n)$ を最小化

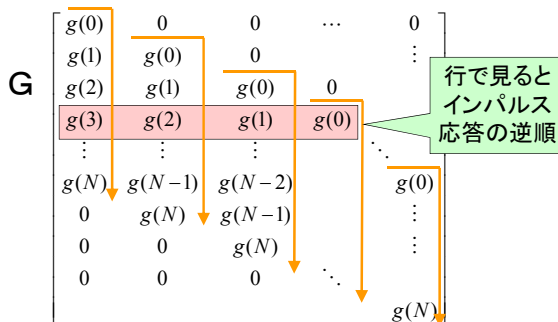
上図のように「遅延」「雑音」を付加することで、
 非最小系であっても良好な近似逆フィルタが得られる

7. 逆フィルタ

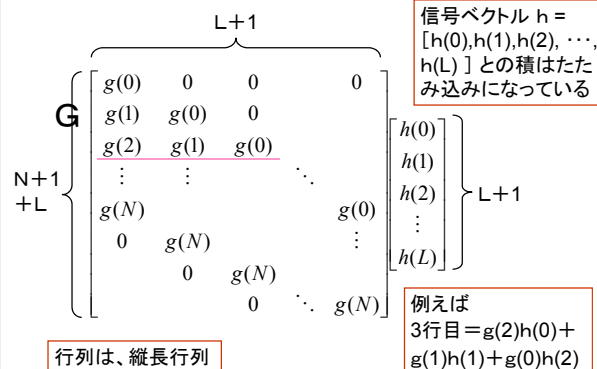
- ◇ 逆フィルタとは
- ◇ DFT の逆特性について
- ◇ 安定条件
- ◇ 近似的実現方法
- ◇ 具体的計算方法
- ◇ 多入出力形逆フィルタ

行列算法 (たたみ込み行列 G)

インパルス応答 $[g(0), g(1), g(2), g(3), \dots, g(N-1), g(N)]$ を
 縦ベクトルとして、1段ずつずらして並べた行列



たたみ込み行列演算



たたみ込みを表す行列方程式

$$y(n) = g(n) * h(n)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{G} \mathbf{h}$$

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N+L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(0) & 0 & 0 & & 0 \\ g(1) & g(0) & 0 & & \\ g(2) & g(1) & g(0) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ g(N) & & & & g(0) \\ 0 & g(N) & & & \vdots \\ & 0 & g(N) & & \\ & & 0 & g(N) & \\ & & & \ddots & g(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(L) \end{bmatrix}$$

Gとyが与えられた時、方程式を満たすような未知数hを求める。

最小2乗原理に基づく計算法

$$\delta = \mathbf{G} \mathbf{h}$$

ただし、 δ は δ 関数 $[1, 0, 0, 0, \dots]^T$
T: 転置

理想解として、 $y = \delta$ とおく。しかし、 \mathbf{G} が縦長行列なので、この方程式を満たす解 \mathbf{h} は存在しないが、 $(\delta - \mathbf{G}\mathbf{h})$ の2乗誤差を最小にする \mathbf{h} は、次式で求められる

$$\mathbf{h} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \delta$$

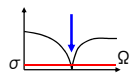
(p.155)

不安定対策

- 1) 遅延の付加
目標出力 δ の時間をずらす
(全長の 1/2 程度)
[1, 0, 0, ...] \rightarrow [0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0, 0]
 - 2) 雑音の付加
 $g(n)$ に 微小な (-40~-60dB程度、用途に依存) 雑音を付加して計算をする。
- その他、用途に応じてさまざまな工夫があります。
(例えば、全周波数帯域の逆フィルタではなく、必要な帯域に制限した逆フィルタ、とか)

周波数領域の計算法

- ◇ 基本的には、インパルス応答 g の DFT \mathbf{G} の逆数 $1/\mathbf{G}$ の逆DFT で求めるが、そのままでは時間軸での折り返し現象がおきて誤差が増大する。
 - ◇ 最も簡易な対策は \mathbf{G} の谷を埋めることである。
例えば、 $G(f) \rightarrow G(f) + \sigma$
 σ は、定数で、 \mathbf{G} の最大値の -40~-60dB程度 の値
- 詳しくは、例えば、
鈴木、浅野ほか：“音響系の伝達関数の模擬をめぐって(その1)”
音響学会誌、44巻12号、pp.936-942 (1988)

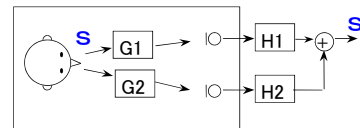


7. 逆フィルタ

- ◇ 逆フィルタとは
- ◇ DFT の逆特性について
- ◇ 安定条件
- ◇ 近似的実現方法
- ◇ 具体的計算方法
- ◇ 多入出力形逆フィルタ

多入出力形逆フィルタ

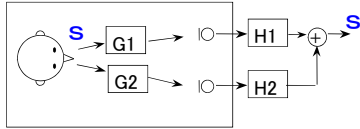
(MINT: Multiple-input/output INverse Theorem)



G_1 や G_2 が非最小位相であるため、個々の経路の逆フィルタ $H_i(z) = 1/G_i(z)$ ($i=1,2$) が不安定であっても、経路を複数設ければ、
 $H_1(z)G_1(z) + H_2(z)G_2(z) = 1$
となる $H_1(z)$ 、 $H_2(z)$ は安定なフィルタとなる。

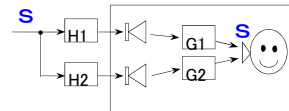
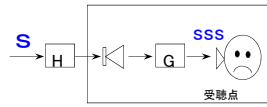
(p.133)

多入出力形逆フィルタの簡単な解釈



- G1 に非最小位相零点があって、逆特性が得られない周波数帯域は、G2 の逆特性を利用する。また逆も同じ。
- 自由度を増やせば、無理なく逆フィルタが得られる。

音場制御における多入力逆フィルタ



$$H1G1 + H2G2 = 1$$

部屋やスピーカの特性をキャンセル(逆)しないと所望の音にはならない。
が、1チャンネルで無理をすとうまく行かない。

2チャンネルならうまいく。

MINT は
チャンネル数を増すと音場制御効果が上がる
理論的根拠を与える

逆フィルタのまとめ

- ◇ $G(z)$ の特性の逆フィルタは $1/G(z)$ であるが、 $G(z)$ が最小位相系でないと不安定になる
- ◇ 逆フィルタが不安定(不良な応答)である時は、以下の点を考慮してFIRフィルタで近似。
 - 1) 回復の目標信号に遅延を許す (Delayed Inverse)
 - 2) 系Gの谷をつぶしてから逆フィルタを計算 (先の雑音付加が相当)
- ◇ 構成することが可能であれば
多入出力逆フィルタは有効

8. 適応フィルタとその応用

- ◇ 適応フィルタとは
- ◇ 適応フィルタの代表的応用例
- ◇ 適応アルゴリズム
- ◇ うまく動作しない場合の例

適応処理とは

状況に応じた適切な処理



非適応な処理（旧型の処理形態）
 状況によらず一定の処理
 状況が変化しても同一の処理

適応処理の例

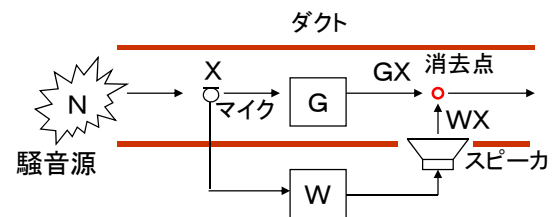
簡単な適応処理

掃除機や洗濯機の（強・中・弱）



高度な適応処理（波形の制御）
 騒音制御、ほか

一次元音場*の騒音制御 (* 音の進行方向が一次元)



- ・ $W = -G$ とすれば、騒音は消去される
- ・ GX と WX の波形の一致が必要
- ・ G の変化に対応する必要がある

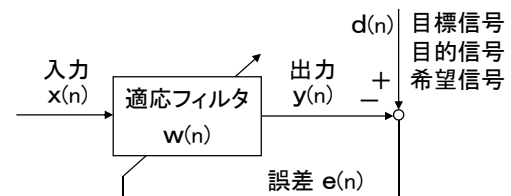
高度な適応処理

適応フィルタ

最適なフィルタ特性を自動的に計算し、
 実行するデジタルフィルタ

- ・ DSP (Digital Signal Processor)
 の進歩に伴って実用化が進む
- ・ さまざまな適応信号処理 発展の原動力

適応フィルタとは

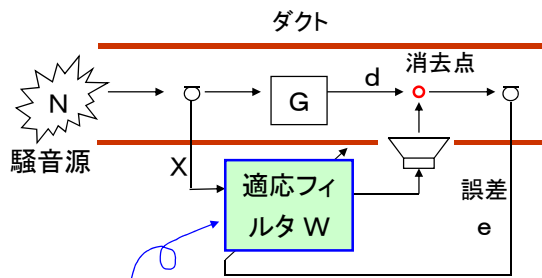


x と d が与えられた時、 d に似た y を合成して
 誤差 e のパワーを最小とする機能を持つフィルタ

自動的に誤差パワーを最小化する

(p.136)

一次元騒音制御における 適応フィルタの適用例



G が変化しても、自動的に $-G$ の特性を持ち
誤差を最小化

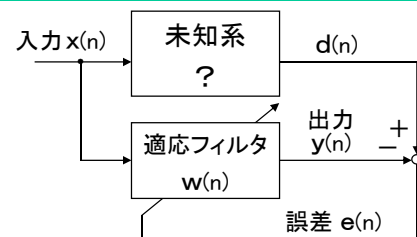
8. 適応フィルタとその応用

- ◇ 適応フィルタとは
- ◇ 適応フィルタの代表的応用例
- ◇ 適応アルゴリズム
- ◇ うまく動作しない場合の例

適応フィルタの代表的応用例

- 1) 未知系の同定
(未知系の持つ入出力特性の推定)
- 2) 逆フィルタの設計
- 3) 予測
(未来の信号の予測)

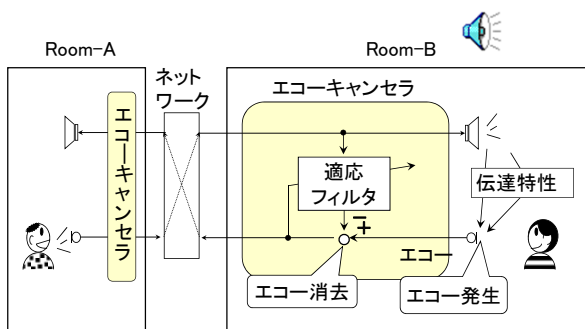
未知系の同定



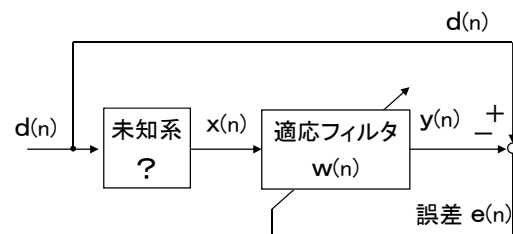
同じ入力 $x(n)$ に対して、同じ出力を出すフィルタ係数、
 $w(n)$ が求めれば、 $w(n)$ が未知系の特性と考えられる。

TSPなど測定用入力が利用できない場合のインパルス応答測定法としても利用

同定の例 (音響エコーキャンセラ)

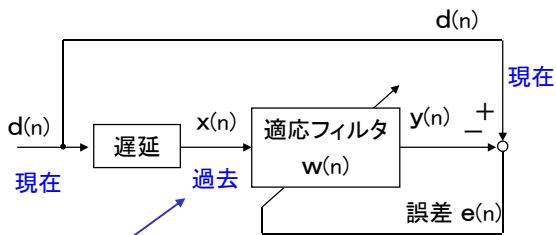


逆フィルタの設計



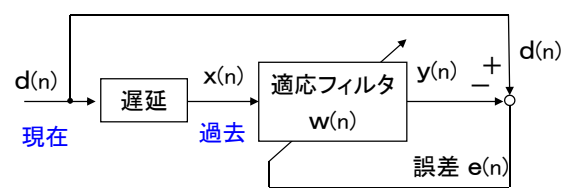
- ・ 未知系によって変形した原信号の回復を最適化
- ・ 必要に応じて、遅延や雑音を付加する(→ 逆フィルタ)

予測



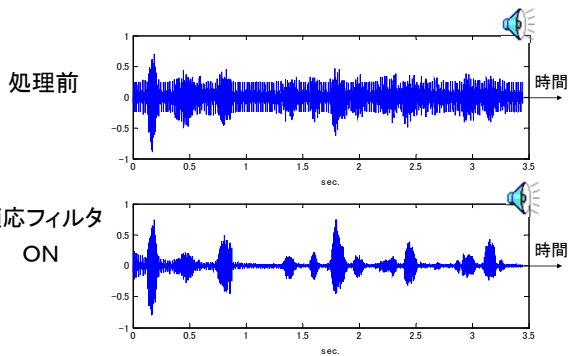
- ・ 過去の信号を用いて、現在の信号を予測できるように学習させる
- ・ 学習後、 $x(n)$ に現在の信号を入力(遅延0)すれば、未来が予測できる

予測の応用



- 実際には、予測できるのは、 $d(n)$ に含まれる周期成分
 → $y(n)$ を出力 → $d(n)$ に含まれる周期成分の抽出
 (雑音に埋もれた周期信号の抽出)
 → $e(n)$ を出力 → $d(n)$ に含まれる周期成分の除去
 (ハムキャンセラ、など)

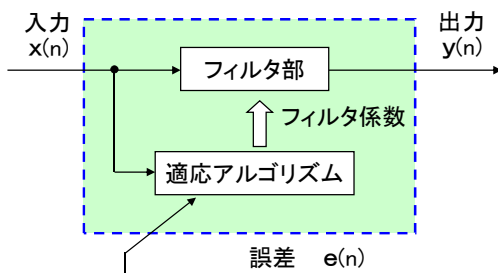
適応フィルタによるハムの除去例



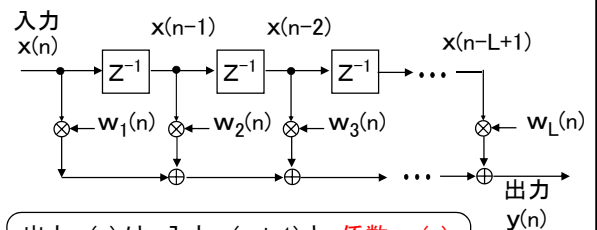
8. 適応フィルタとその応用

- ◇ 適応フィルタとは
- ◇ 適応フィルタの代表的応用例
- ◇ 適応アルゴリズム
- ◇ うまく動作しない場合の例

適応フィルタの内部構成



フィルタ部(可変FIRフィルタ)の構成



出力 $y(n)$ は、入力 $x(n-j+1)$ と、係数 $w_j(n)$ との積和(たたみ込み)として得られる。

時間によって変化する

誤差パワー

$$y(n) = \sum_{j=1}^L w_j(n) x(n-j+1)$$

$$e(n) = d(n) - y(n)$$

適応フィルタの目標:

誤差パワー $J = E[e(n)^2]$ を最小化

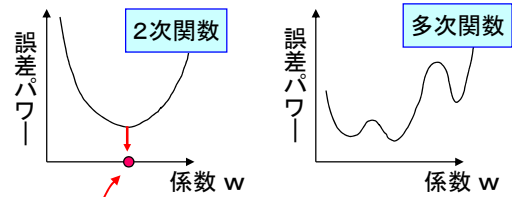
$$J = E[\{d(n) - y(n)\}^2]$$

$$= E[\{d(n) - \sum w_j(n) x(n-j+1)\}^2]$$

誤差パワー J は係数 $w_j(n)$ の2次関数である

(p.138)

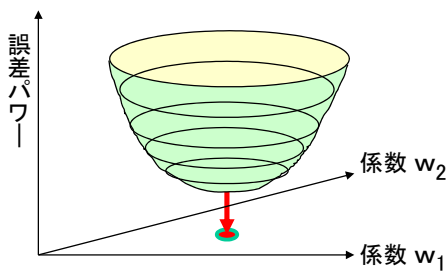
2次関数の特長



誤差パワーが係数の2次関数であると、...

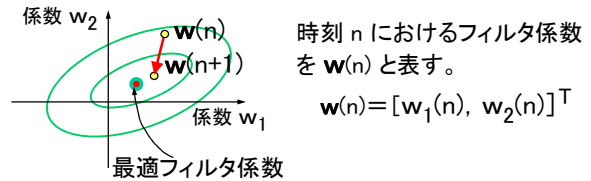
- ・ 唯一の最適解が存在し、解析的に求めることが容易
- ・ 誤差パワーが小さくなるように係数を修正すれば、探索的に求めることも容易

誤差曲面 (L=2)



誤差パワーの最小値を与える係数が、最適フィルタ係数

誤差曲面の等高線表示 (L=2)



時刻 n におけるフィルタ係数を $\mathbf{w}(n)$ と表す。

$$\mathbf{w}(n) = [w_1(n), w_2(n)]^T$$

この $\mathbf{w}(n)$ を少しずつ修正していった、最適フィルタ係数に近づけていく。

修正の方針 → 誤差パワーが最大減少する方向 (急斜面)

係数の修正方法 (適応アルゴリズム)

ある点での最大減少方向

$$-\frac{\partial e^2(n)}{\partial \mathbf{w}} = 2 \cdot e(n) \cdot \mathbf{x}(n)$$

$$\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1)]^T$$

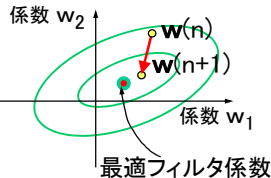
フィルタ係数の修正 (LMS 法)

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + 2\mu e(n) \cdot \mathbf{x}(n)$$

(最も簡単な適応アルゴリズム)

μ : ステップサイズ

修正は、入力 x と誤差 e に基づいて行われる



学習同定法

(最も広く利用されている)

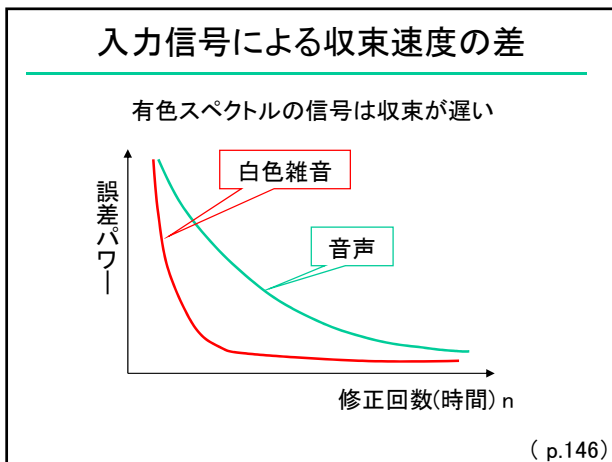
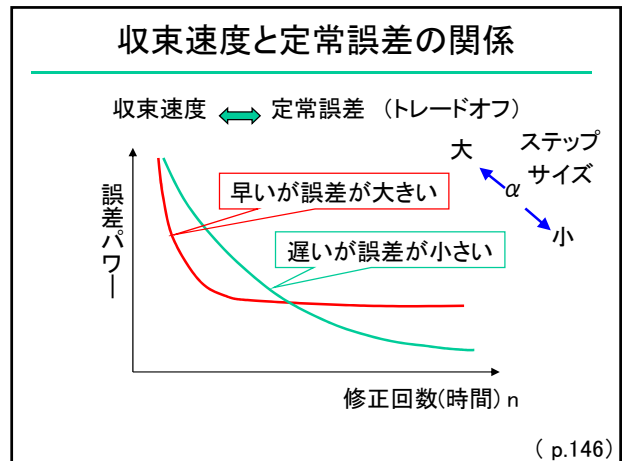
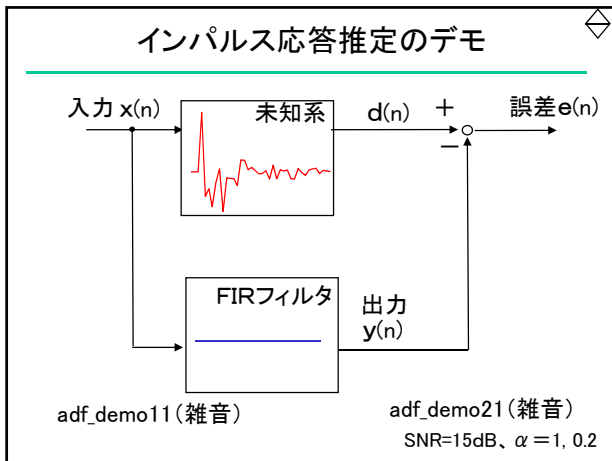
$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\alpha}{\mathbf{x}(n)^T \mathbf{x}(n) + \beta} e(n) \cdot \mathbf{x}(n)$$

α : ステップサイズ
($0 < \alpha \leq 1$)

$\alpha = 1, \beta = 0$ のとき

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(n+1)^T \mathbf{x}(n) &= \mathbf{w}(n)^T \mathbf{x}(n) + \frac{e(n) \cdot \mathbf{x}(n)^T \mathbf{x}(n)}{\mathbf{x}(n)^T \mathbf{x}(n)} \\ &= y(n) + e(n) \\ &= d(n) \end{aligned}$$

(p.141)



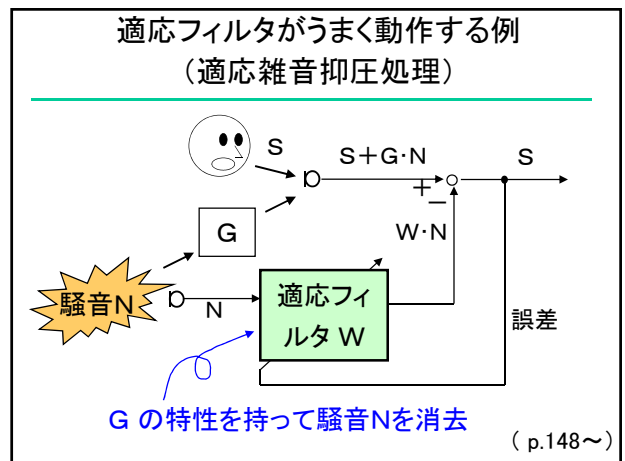
入力信号と収束速度

◇ 適応フィルタの収束の早さは、
入力信号の性質に依存

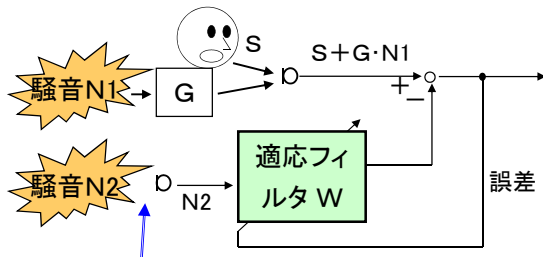
白色信号 \rightarrow 速い
 有色信号 \rightarrow 遅い

\Downarrow
 各種高速アルゴリズム
 \rightarrow 主として信号の白色化

- ## 8. 適応フィルタとその応用
- ◇ 適応フィルタとは
 - ◇ 適応フィルタの代表的応用例
 - ◇ 適応アルゴリズム
 - ◇ うまく動作しない場合の例

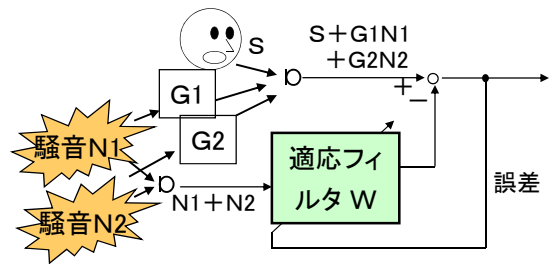


誤差パワーが小さくならない
(適応フィルタがうまく動作しない)例



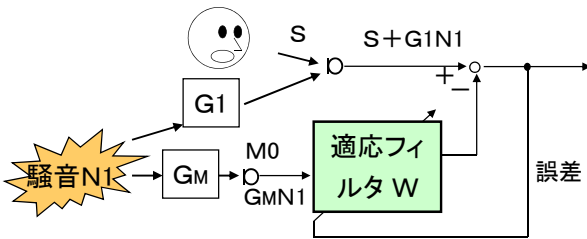
モニタしているのは、消すべき騒音N1とは異なった騒音N2 (騒音N2から騒音N1をつくることは不可能)

複数の音源からの雑音が混入する場合



複数の騒音N1, N2 が複数の経路G1, G2で受信されている場合。適応フィルタは、G1となってN1を消去することはできるが、その場合、N2は消去できない。

モニタマイク M0 で受信する雑音に
伝達特性GM が付加される場合



雑音を消去するためには、適応フィルタの特性は、G1/GM となる必要があり、これは逆フィルタとなるので、不安定な場合は、雑音を消去できない

適応フィルタが良好に動作するためには…

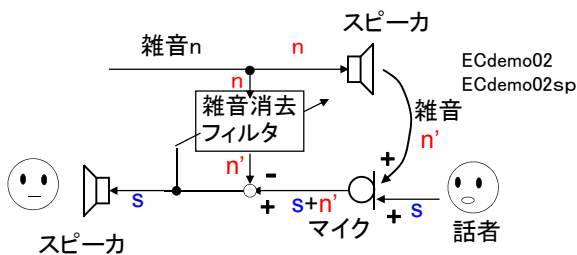
誤差パワーを小さくするフィルタが
理論的に存在することが必要条件である
(その特性は不明や時変でもよい)

動作不良の場合は理論的考察が必要



存在が保証されていれば、
x と d を与えるだけで、自動的に、
誤差パワーを小さくする特性を見出す。

雑音除去実験
(エコーキャンセラ)



適応フィルタのまとめ

- 適応フィルタは、
フィルタ出力と目的信号との誤差パワーを
最小化するフィルタ特性を自動的に実現する
- 代表的な応用形態は、同定、逆フィルタ、予測
- フィルタ特性を更新するアルゴリズムとして
学習同定法などが知られている
- 誤差が小さくならない場合は、
音響系をモデル化して、
理想フィルタ特性の実現性を考察する

9. 受信系における信号処理の応用

マイクロホンアレー^{*)}による

① 音源方向の検出

(相互相関関数による信号の時間差検出)

② 指向性制御

- ・ 遅延和アレー → 信号の遅延時間制御
- ・ 適応形アレー

*) 複数のマイクロホンよりなる受信装置

音源方向検出

◇ 音の到来する方向を見つける技術で、
応用分野は広い

- ・ 通信会議における話者追従カメラ
- ・ ロボットの耳機能
- ・ 監視装置
- ・ 騒音源調査

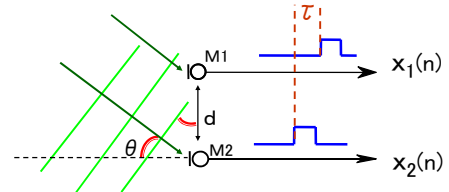
など



音源方向検出の代表的手法

- 1) 指向性のビームをスキャンして、
最大パワーとなる方向を検出
- 2) 相互相関関数を利用した方向検出
- 3) 多チャンネル相関行列を利用した
高分解能信号処理 (p.203)

遅延時間 τ がわかれば、
音源方向 θ がわかる

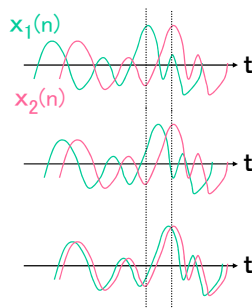


$$\tau = d \sin \theta / c \quad \begin{array}{l} \theta : \text{音源方向} \\ c : \text{音速} \end{array}$$

$$\theta = \sin^{-1}(c \tau / d)$$

(p.197)

相互相関関数



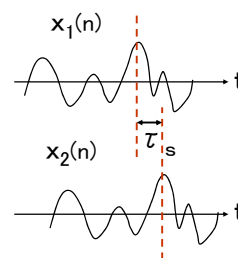
2つの信号 $x_1(n)$ と $x_2(n)$
との 相互相関関数

$$\phi_{12}(\tau) = \sum_n x_1(n+\tau) x_2(n)$$

τ : 離散時間 (整数)

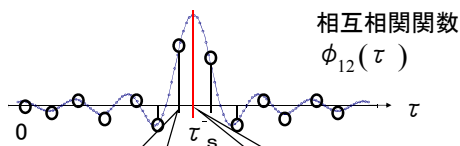
$x_1(n)$ を τ だけ
ずらしながら
2つの波形の積の
総和を計算。
重なったところで最大
(積がすべて正となる)

遅延時間の検出



2つの信号、
 $x_1(n)$ と $x_2(n)$ の
相互相関関数
 $\phi_{12}(\tau)$
のピーク値を与える
 τ の値が
 τ_s を与える

最大値の位置に注意



ここではなく こちら

方向の推定精度をあげる場合、
必要に応じて補間を行う

音源追従 マイクロホンアレーシステム

- 1) 2つのマイクロホンで得られた信号の相関関数 $\phi_{12}(\tau)$ を計算。
- 2) 相関関数が最大値をとる τ の値 τ_s を求める。
- 3) 音源方向 θ_s を求める。
(方向検出方法は他の方法でも可)
- 4) θ_s 方向に指向性ビームを形成

9. 受信系における信号処理の応用

マイクロホンアレー*)による

- ① 音源方向の検出
(相互相関関数による信号の時間差検出)
- ② 指向性制御
 - ・ 遅延和アレー → 信号の遅延時間制御
 - ・ 適応形アレー

*) 複数のマイクロホンよりなる受信装置

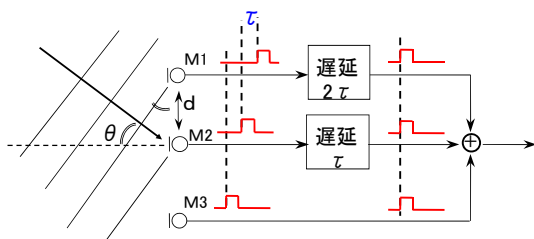
マイクロホンアレーによる指向性制御

2種類の制御方針

- 1) 加算形: 目的音を強調
遅延和アレー (超指向性アレー)
- 2) 減算形: 不要音(雑音)を除去
適応型アレーなど

(p.174)

加算形アレー(遅延和アレー)の原理

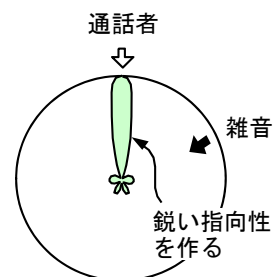


$$\tau = d \sin \theta / c$$

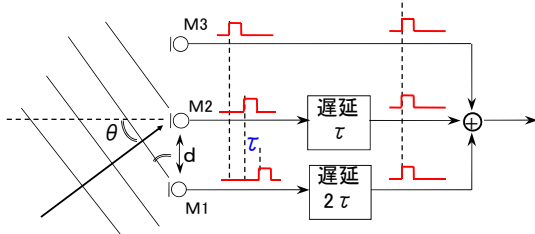
θ : 目的方向
 c : 音速

(p.181)

遅延和アレー (超指向性アレー)の指向特性



遅延を変えれば 指向性を変えることができる



デジタル技術を利用すれば 簡単に任意の遅延を実現できる

1) サンプリング周期 T_s の整数倍の遅延の付与
(遅延 $\tau = nT_s$ の場合 n : 整数)

信号を n サンプル分
シフトすれば(遅らせれば)よい



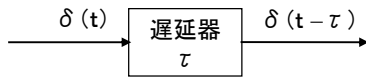
細かい遅延制御を行うには、
サンプリング周波数を上げて、
細かくサンプリングすればよい

② デジタルフィルタを利用した任意遅延の付与

(p.215)

遅延器のインパルス応答

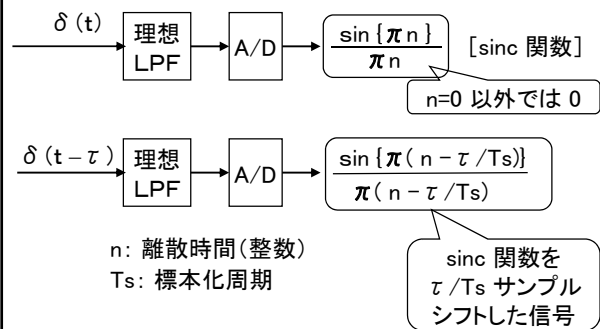
信号を、時間 τ だけ遅らせる(アナログ)遅延器
のインパルス応答は、 $\delta(t - \tau)$



注) 現実には、任意時間のアナログ遅延器は実現困難

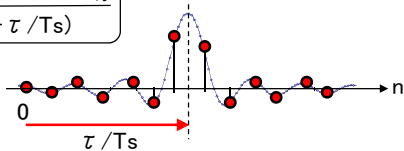
$\delta(t - \tau)$ をデジタルフィルタで実現すればよい。

$\delta(t - \tau)$ のデジタル化



遅延デジタルフィルタのインパルス応答

$$h(n) = \frac{\sin\{\pi(n - \tau/T_s)\}}{\pi(n - \tau/T_s)}$$

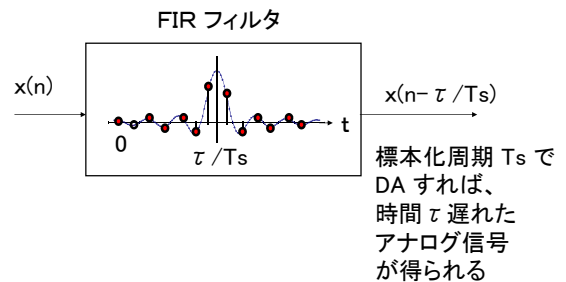


・ N タップの FIR フィルタで実現するには、 $0 \sim N-1$ の範囲で $h(n)$ を切り出して、 $h(0), \dots, h(N-1)$ をフィルタ係数とする。

注) τ が小さい場合には打ちきり誤差が大きい

→ 可能なら、全チャンネルに一定量の遅延 D を付加する
 $\tau \rightarrow \tau + D$

FIRフィルタによる時間 τ の遅延器



指向特性の制御

デジタルフィルタの係数(プログラムの変数)を変えることで、遅延が自由に制御できる

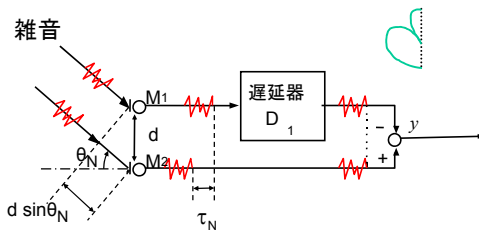
→ 指向特性の自由な制御



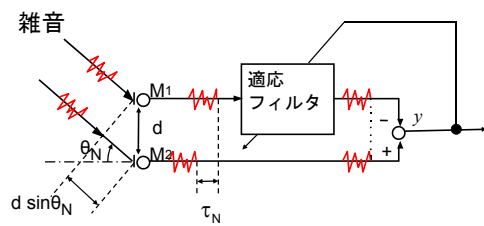
2種類の指向性制御方式の比較

- 1) 加算形: 目的音を強調
超指向性アレー
○処理が簡単 ×大規模
- 2) 減算形: 不要音(雑音)を除去
適応型アレー
○小規模 ×処理がやや複雑

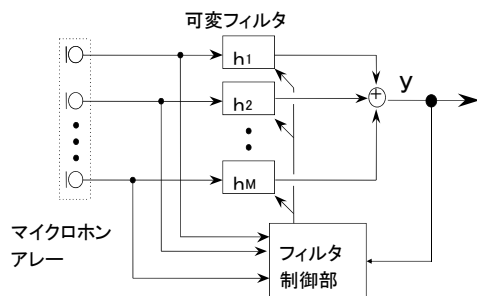
減算形アレーによる雑音の消去



適応フィルタを用いた遅延の推定



適応形マイクロホンアレーの構成



(p.186~)

適応形マイクロホンアレーの実験例

