

## 複合 Normalized LMS (NLMS) 法モデルを用いた アフィン射影法の収束特性の検討\*

田中雅史\*<sup>1</sup> 金田 豊\*<sup>2</sup>

【要旨】 テレビ会議などで問題となる音響エコーの消去に用いられる代表的な適応フィルタとして, Normalized Least Mean Squares (NLMS) 法と NLMS 法の収束速度を改善した Affine Projection (AP) 法がある。従来の NLMS 法と AP 法の収束特性の解析は, 固有値解析を用いた複雑なものであった。本論では, まず, AP 法を複数の NLMS 法の集まりとして表現し, 次に AP 法の収束特性をそれら NLMS 法の収束特性を基本構成要素として表現することで解析とその理解を容易にした。有色性雑音及び音声による計算機シミュレーションによりこれらの表現の有効性を確認した。

キーワード エコー, 適応フィルタ, アフィン射影, 収束特性  
Echo, Adaptive filter, Affine projection, Convergence

### 1. はじめに

本論はアフィン射影 (Affine Projection) 法 (以下, AP 法) [1, 2] と呼ばれる適応フィルタ手法について, そのフィルタ係数の収束特性のひとつの解釈を提示することを目的としている。最初に本章では, 適応フィルタ手法やその一手法である AP 法が使われる背景と従来研究と比較しての本論のアプローチの説明を行う。

近年のテレビ会議や PC 上のコミュニケーションソフトウェアの普及に伴い拡声通話と呼ばれる通話形態の利用が広がりつつある。拡声通話ではスピーカとマイクロホンにより通話を行うので, ハンドセットやヘッドセットで通話するのに対し, 多数の人が一度に通話に参加できるという利点がある。しかしその反面, 拡声通話ではスピーカから放射された音がマイクロホンに回り込む音響帰還によってエコーが生じ, 通話に支障が出るという問題がある。

音響帰還の制御方法には様々な手法があるが, その中でもスピーカからマイクロホンへ至るエコーの伝達経路をデジタルフィルタ (主に FIR 型) として表現し, そのデジタルフィルタと受話信号を畳み込むことで推定エコーを生成し, マイクロホン受話信号から推定エコーを引き去る方法 (エコーキャンセラ) が送話

音声への影響がないことからよく利用されている。音響帰還によるエコーの伝達経路は変動し易いため, エコーの伝達経路を常時推定する必要があり, 逐次的に推定する手法として適応フィルタと総称される手法が用いられる。

あるエコー消去量を得るのに必要な適応フィルタの長さはエコー伝達経路のインパルス応答長に比例し, 適応フィルタが収束するまでの時間は適応フィルタ長に比例する。従って, フィルタ長が数百タップ以上もの, 変化し易い音響エコー伝達経路を推定するには, 収束 (追従) の速い適応フィルタアルゴリズムが求められることになる。

適応フィルタアルゴリズムは様々なものが提案されているが, その中で, 最も利用されているのが Normalized Least Mean Squares 法 (NLMS 法あるいは学習同定法) [3] である。他によく知られた手法として Recursive Least Squares (RLS) 法がある。NLMS 法と RLS 法を比較すると, NLMS 法は, 音声などの有色の入力に対して収束が遅いという欠点があるが, 演算量 (積和算の回数) は適応フィルタのタップ数  $L$  の 2 倍と比較的少ない。一方, RLS 法は, 有色入力に対しても白色信号入力と変わらない速い収束速度を有するが, 演算量は  $L^2$  に比例し, フィルタ長が長い音響帰還によるエコーの場合は, 非常に多くなり実用的ではない。

AP 法は, NLMS 法と RLS 法の間位置する手法で, 入力信号の相関を除去する予測フィルタの次数に相当する射影次数  $p$  というパラメータを有し, このパラメータが  $p = 1$  で NLMS 法に,  $p = L$  で窓長  $2L + p - 1$  の方形窓 RLS 法と等価になる。収束速度も

\* An interpretation of the affine projection (AP) algorithm convergence on the normalized Least-Mean-Squares (NLMS) algorithm basis,  
by Masashi Tanaka and Yutaka Kaneda.

\*<sup>1</sup> 日本電信電話(株)NTT サイバースペース研究所

\*<sup>2</sup> 東京電機大学工学部情報通信工学科

(問合せ先: 田中雅史 〒180-8585 武蔵野市緑町 3-9-11  
日本電信電話(株)NTT サイバースペース研究所)  
(2005年10月12日受付, 2006年2月6日採録決定)

NLMS 法と RLS 法の間位置し、有色信号に対して NLMS 法より高速である。演算量については、提案された当時の計算法では、 $pL + O(p^3)$  であり、NLMS 法より多いという欠点があったが、後に NLMS 法と同程度にする手法が開発されている [4-6]。

本論は AP 法の収束特性のひとつの解釈を提示することを目的としている。AP 法における収束特性の把握は重要な課題であり、これまでの多くの検討がなされてきた [7-11]。しかし、これらの多くは入力信号の共分散行列の固有値分析を用いた方法であるため、AP 法の収束過程の把握や、収束特性の定性的な理解を行うには難解なものであった。

そこで、本論では、収束特性がよく知られている NLMS 法を基本要素として AP 法を表現し、収束特性解析を行うこととした。収束特性の評価量としては、エコー伝達経路を模擬するデジタルフィルタ係数値の真値との誤差（係数誤差）に着目して、その 2 乗和の収束の過程（過渡状態係数 2 乗誤差）及び収束後の値（定常状態係数 2 乗誤差）を取り上げる。なお、以下では、過渡状態係数 2 乗誤差は過渡誤差、定常状態係数 2 乗誤差は定常誤差と略すこととする。

次章以降、2 章では NLMS 法と AP 法、加えて、解析の道具であるコレスキー分解を概説する。3 章では AP 法を複数の NLMS 法の集まりと解釈する複合 NLMS 法モデルを示す。次に、4 章では、2、3 章を受けて AP 法の収束特性を NLMS 法の収束特性を用いて表現する。5 章で計算機シミュレーションによりこの表現の妥当性を検証し、最後にまとめる。

## 2. 準備

本章では、記号の定義、収束特性の指標とする量の定義と、次章以降で必要となる NLMS 法、AP 法とコレスキー分解の説明を行う。

### 2.1 NLMS 法

図-1 に NLMS 法を用いた適応フィルタ系の構成を示す。同図で、 $k$  は離散時刻を表し、 $x, d, y, e, n$  は、それぞれ、入力信号、目的信号、推定信号、推定誤差、雑音を表す。また、 $\hat{h}, h_0$  は、それぞれ、適応フィルタ係数、未知系の最適ウィナーフィルタ係数を表す。太文字はその変数がベクトルあるいは行列であることを表す。NLMS 法は、

$$\hat{h}(k) = \hat{h}(k-1) + \mu \{x(k) / \|x(k)\|^2\} e(k) \quad (1)$$

$$x(k) = [x(k), x(k-1), \dots, x(k-L+1)]^T \quad (2)$$

により適応フィルタ係数  $\hat{h}$  を更新する。ここで、 $L$  は適応フィルタ長、 $\mu$  はステップサイズを表す。また、目的信号  $d(k)$ 、推定信号  $y(k)$ 、推定誤差  $e(k)$  は、それ

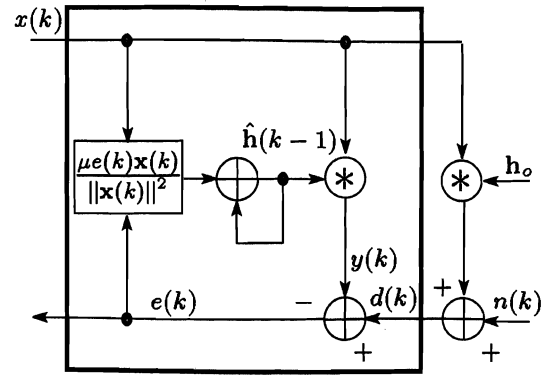


図-1 NLMS 法を用いた適応系

ぞれ、

$$d(k) = x^T(k)h_0 + n(k) \quad (3)$$

$$y(k) = x^T(k)\hat{h}(k-1) \quad (4)$$

$$e(k) = d(k) - y(k) \quad (5)$$

である。これら (3), (4), (5) を (1) に代入すると、フィルタ係数誤差  $\epsilon(k) = \hat{h}(k) - h_0$  に関する再帰式

$$\epsilon(k) = [I - \mu P_x(k)]\epsilon(k-1) + \mu \tilde{x}(k)n(k) \quad (6)$$

が得られる。ただし、 $I$  は単位行列、 $P_x(k)$  はベクトル  $x(k)$  に対する射影行列であり、

$$P_x(k) = \tilde{x}(k)x^T(k) \quad (7)$$

$$\tilde{x}(k) = x(k) / \|x(k)\|^2. \quad (8)$$

### 過渡誤差

入力信号  $x$  に対する、時刻  $k$  での NLMS 法による係数 2 乗誤差の期待値を  $J_{NLMS,x}(k)$  と表す。すなわち、

$$J_{NLMS,x}(k) \equiv E [\|\epsilon(k)\|^2] \quad (9)$$

(6) の右辺において、過渡状態においては雑音より係数誤差の方が大きく  $\|\text{第 1 項}\|^2 \gg \|\text{第 2 項}\|^2$  と見なせる。よって (9) は、(6) の第 1 項の 2 乗ノルムを  $\epsilon$  に関して再帰的に展開して、次式のように近似できる。

$$\begin{aligned} J_{NLMS,x}(k) &\approx E [\| [I - \mu P_x(k)]\epsilon(k-1) \|^2] \\ &= E \left[ \left\| \prod_{m=1}^k [I - \mu P_x(m)]\epsilon(0) \right\|^2 \right] \end{aligned} \quad (10)$$

### 定常誤差

適応フィルタが収束している定常状態での係数 2 乗誤差の期待値は  $J_{NLMS,x}(\infty)$  は、

$$J_{NLMS,x}(\infty) \approx \frac{\mu}{2 - \mu} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2} \quad (11)$$

によりよく近似される [12]。ただし、 $\sigma_n^2$  と  $\sigma_x^2$  はそれぞれ、雑音  $n$  と入力信号  $x$  の分散である。この式の導出は付録を参照。

## 2.2 AP 法

NLMS 法では 1 時刻分の推定誤差  $e(k)$  と入力信号ベクトル  $\mathbf{x}(k)$  を用いて適応フィルタを更新するが、AP 法では、射影次数  $p (\leq L)$  時刻分の推定誤差と入力信号ベクトルを用いて適応フィルタを更新する。AP 法の適応フィルタ係数の更新は、NLMS 法の更新 (1) において、ベクトル  $\mathbf{x}$  とスカラー  $e$  をそれぞれ行列  $\mathbf{X}$  とベクトル  $\mathbf{e}$  に置き換えることにより、

$$\hat{\mathbf{h}}(k) = \hat{\mathbf{h}}(k-1) + \mu \mathbf{X}(k) [\mathbf{X}^T(k) \mathbf{X}(k)]^{-1} \mathbf{e}(k) \quad (12)$$

と得られる。ここで、 $\mathbf{X}$  は  $L$  行 (フィルタ長)  $p$  列 (射影次数) の入力信号行列

$$\mathbf{X}(k) = [\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k-1), \dots, \mathbf{x}(k-p+1)] \quad (13)$$

である。また、 $\mathbf{e}$  は要素数  $p$  の列ベクトルであり、

$$\mathbf{e}(k) = \mathbf{d}(k) - \mathbf{X}^T(k) \hat{\mathbf{h}}(k-1) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(k) &= [d(k), d(k-1), \dots, d(k-p+1)]^T \\ &= \mathbf{X}^T(k) \mathbf{h}_0 + \mathbf{n}(k), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathbf{n}(k) = [n(k), n(k-1), \dots, n(k-p+1)]^T \quad (16)$$

により定義される。

なお、入力信号の共分散行列  $\mathbf{X}^T(k) \mathbf{X}(k)$  の固有値が 0 か 0 に近いことがあり、その場合には逆行列の固有値が大きくなる値となり (12) で誤差  $\mathbf{e}(k)$  中のノイズを拡大し、適応フィルタの係数が乱れる。これを避けるために、実際的には次式に示すように共分散行列  $\mathbf{X}^T(k) \mathbf{X}(k)$  に対角に微少量  $\delta$  を持つ対角行列  $\delta \cdot \mathbf{I}$  を加えることで固有値の最小値を保証した更新式を用いる。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{h}}(k) &= \hat{\mathbf{h}}(k-1) \\ &+ \mu \mathbf{X}(k) [\mathbf{X}^T(k) \mathbf{X}(k) + \delta \cdot \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{e}(k) \end{aligned} \quad (17)$$

## 2.3 前向き予測とコレスキー分解

本節では、前向き予測フィルタとコレスキー分解について述べる [13]。図-2 のように、入力信号  $x(k)$  の 0, 1, ...,  $p-1$  次の前向き予測フィルタからなるフィルタバンクを考える。ただし、同図で  $\mathbf{f}_0(k-p+1), \mathbf{f}_1(k-p+2), \dots, \mathbf{f}_{p-1}(k)$  は予測係数列ベクトルである。 $i$  次の予測係数ベクトル  $\mathbf{f}_i(k-p+1+i)$  は、

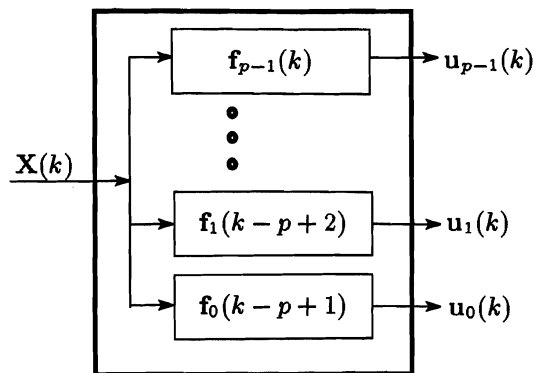


図-2 前向き予測フィルタバンク

以下の正規方程式の解である。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i^T(k-p+1+i) \mathbf{X}_i(k-p+1+i) \\ \mathbf{f}_i(k-p+1+i) = [U_i(k-p+1+i), 0, \dots, 0]^T \end{aligned} \quad (18)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i(k-p+1+i) = \\ [\mathbf{x}(k-p+1+i), \mathbf{x}(k-p+i), \dots, \mathbf{x}(k-p+1)] \end{aligned} \quad (19)$$

また、 $U_i(k-p+1+i)$  は  $\mathbf{f}_i(k-p+1+i)$  による予測残差の 2 乗和である。予測係数ベクトル  $\mathbf{f}_i(k-p+1+i)$  の  $j$  番目の係数を  $f_{i,j}(k-p+1+i)$  と表すと、 $p$  行  $p$  列のフィルタバンク行列  $\mathbf{F}(k)$  は、

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(k) &= [\mathbf{f}_{p-1}(k), \dots, \mathbf{f}_1(k-p+2), \mathbf{f}_0(k-p+1)] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ f_{p-1,1}(k) & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ f_{p-1,p-2}(k) & \dots & 1 & 0 \\ f_{p-1,p-1}(k) & \dots & f_{1,1}(k-p+2) & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

と書ける。このフィルタバンク行列は入力信号行列  $\mathbf{X}(k)$  の列ベクトル  $\mathbf{x}(k-i)$  に対して  $i$  次の前向き予測を行い予測残差  $\mathbf{u}_i(k)$  を生成する。予測残差  $\mathbf{u}_i(k)$  を列ベクトルに持つ行列  $\mathbf{U}(k)$  はフィルタバンク行列  $\mathbf{F}(k)$  を用いて、

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(k) &= [\mathbf{u}_{p-1}(k), \mathbf{u}_{p-2}(k), \dots, \mathbf{u}_0(k)] \\ &= \mathbf{X}(k) \mathbf{F}(k) \end{aligned} \quad (21)$$

と書くことができる。更に、予測残差ベクトル  $\mathbf{u}_i(k)$  は、

$$\mathbf{u}_i^T(k)\mathbf{u}_j(k) = \begin{cases} \|\mathbf{u}_i(k)\|^2 (= U_i(k-p+1+i)) & (i=j), \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (22)$$

のように互いに直交することから,

$$\mathbf{U}^T(k)\mathbf{U}(k) = \mathbf{D}(k) = \text{diag}(\|\mathbf{u}_{p-1}(k)\|^2, \|\mathbf{u}_{p-2}(k)\|^2, \dots, \|\mathbf{u}_0(k)\|^2) \quad (23)$$

という関係が成り立つ。ここで、 $\mathbf{D}(k)$  は予測残差のパワーを対角要素に持つ対角行列である。更に、(21) と (23) より、入力信号の共分散行列は、コレスキー分解として知られるように、

$$[\mathbf{X}^T(k)\mathbf{X}(k)]^{-1} = \mathbf{F}(k)\mathbf{D}^{-1}(k)\mathbf{F}^T(k) \quad (24)$$

と分解される。

### 3. AP 法の複合 NLMS 法モデル

本章では、コレスキー分解を用いて AP 法の係数更新式 (12) を複数の NLMS 法の更新式が複合した形に変形する。(12) に (21) と (24) を代入し、(23) の関係を用いると、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{h}}(k) &= \hat{\mathbf{h}}(k-1) + \mu \mathbf{U}(k)\mathbf{D}^{-1}(k)\mathbf{F}^T(k)\mathbf{e}(k) \\ &= \hat{\mathbf{h}}(k-1) + \mu \left[ \frac{\mathbf{u}_{p-1}(k)}{\|\mathbf{u}_{p-1}(k)\|^2}, \frac{\mathbf{u}_{p-2}(k)}{\|\mathbf{u}_{p-2}(k)\|^2}, \dots, \frac{\mathbf{u}_0(k)}{\|\mathbf{u}_0(k)\|^2} \right] \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{p-1}^T(k) \\ \mathbf{f}_{p-2}^T(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_0^T(k-p+1) \end{bmatrix} \mathbf{e}(k) \\ &= \hat{\mathbf{h}}(k-1) + \mu \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\mathbf{u}_i(k)}{\|\mathbf{u}_i(k)\|^2} \mathbf{e}_{f,i}(k) \end{aligned} \quad (25)$$

と変形できる。ただし、(14)、(15) と (21) より、

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{f,i}(k) &= \mathbf{f}_i^T(k-p+1+i)\mathbf{e}(k) \\ &= \mathbf{f}_i^T(k-p+1+i) \\ &\quad \times \left\{ \mathbf{X}^T(k)[\mathbf{h}_o - \hat{\mathbf{h}}(k-1)] + \mathbf{n}(k) \right\} \\ &= \mathbf{u}_i^T(k)[\mathbf{h}_o - \hat{\mathbf{h}}(k-1)] + n_{f,i}(k) \end{aligned} \quad (26)$$

$$n_{f,i}(k) = \mathbf{f}_i^T(k-p+1+i)\mathbf{n}(k) \quad (27)$$

$$\mathbf{n}(k) = [n(k), n(k-1), \dots, n(k-p+1)]^T \quad (28)$$

である。(25) から、適応フィルタ係数  $\hat{\mathbf{h}}$  の修正量

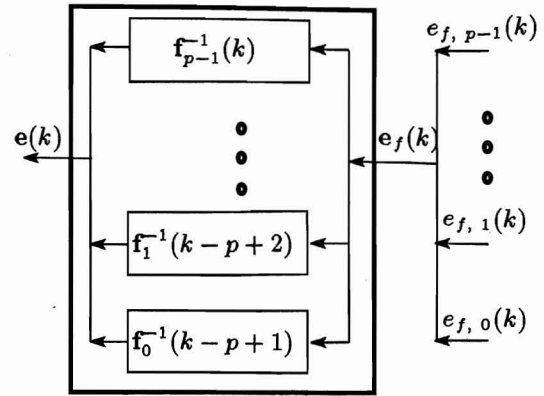


図-3 前向き予測合成フィルタバンク

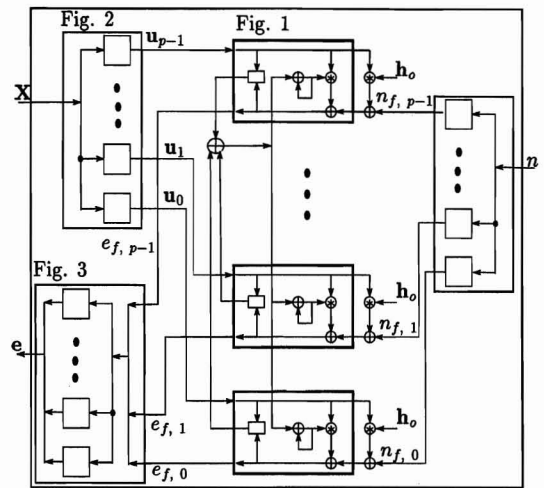


図-4 AP 法の複合 NLMS 法モデル  
左右中央に縦に並ぶ太線の枠内が予測残差信号  $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$  を入力とした  $p$  個の NLMS 適応系。

は、入力信号  $x(k)$  の  $i$  次予測残差信号  $u_i(k)$ , ( $i = 0, 1, \dots, p-1$ ) を入力とした  $p$  個の NLMS 法による修正量の和になることが分かる。

推定誤差  $\mathbf{e}(k)$  については、予測残差に対する推定誤差を要素に持つベクトル  $\mathbf{e}_f(k)$  を

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_f(k) &= \mathbf{F}^T(k)\mathbf{e}(k) = \\ &= [e_{f,p-1}(k), \dots, e_{f,1}(k), e_{f,0}(k)]^T \end{aligned} \quad (29)$$

と定義すると

$$\mathbf{e}(k) = (\mathbf{F}^T)^{-1}(k)\mathbf{e}_f(k) \quad (30)$$

と  $\mathbf{e}_f(k)$  から合成される。 $\mathbf{F}^{-1}$  の  $i$  列を  $\mathbf{f}_i^{-1}$  と表記すると (30) は図-3 に示す構成になる。同図右から入力する予測残差の推定誤差  $e_{f,i}(k)$  を集めてベクトル  $\mathbf{e}_f(k)$  とし、それを各フィルタ  $\mathbf{f}_i^{-1}$  に入力する。フィルタの出力は予測残差  $\mathbf{e}(k)$  となる。

以上、(25) から (30) が AP 法の複合 NLMS 法モデルである。図-4 はこのモデルに基づく AP 法の構

造を示すものであり、AP 法が、 $p$  個の NLMS 適応系と、入力信号系列  $\{x(k)\}$  とノイズ系列  $\{n(k)\}$  をフィルタリングする同一係数の予測フィルタバンク、そして、予測残差に対する推定誤差から入力  $\mathbf{X}(k)$  に対する推定誤差を合成するフィルタバンクから構成されることを示している。

#### 4. 複合 NLMS 法モデルに基づく AP 法の収束特性

本章では、AP 法のフィルタ係数の 2 乗誤差の過渡及び定常特性を、前章で示した複合 NLMS 法モデルに沿って近似する式を導出する。

AP 法における係数誤差  $\epsilon(k)$  の再帰更新式は、(25) と (26) を用いて、

$$\begin{aligned} \epsilon(k) &= \hat{\mathbf{h}}(k) - \mathbf{h}_o \\ &= \hat{\mathbf{h}}(k-1) - \mathbf{h}_o + \mu \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\mathbf{u}_i(k)}{\|\mathbf{u}_i(k)\|^2} e_{f,i}(k) \\ &= \hat{\mathbf{h}}(k-1) - \mathbf{h}_o + \mu \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\mathbf{u}_i(k)}{\|\mathbf{u}_i(k)\|^2} \\ &\quad \times \left\{ \mathbf{u}_i^T(k) [\mathbf{h}_o - \hat{\mathbf{h}}(k-1)] + n_{f,i}(k) \right\} \\ &= \left[ \mathbf{I} - \mu \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\mathbf{u}_i(k) \mathbf{u}_i^T(k)}{\|\mathbf{u}_i(k)\|^2} \right] \\ &\quad \times [\hat{\mathbf{h}}(k-1) - \mathbf{h}_o] + \mu \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\mathbf{u}_i(k)}{\|\mathbf{u}_i(k)\|^2} n_{f,i}(k) \\ &= \left[ \mathbf{I} - \mu \sum_{i=0}^{p-1} \mathbf{P}_{u,i}(k) \right] \epsilon(k-1) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{p-1} \mu \tilde{\mathbf{u}}_i(k) n_{f,i}(k) \end{aligned} \quad (31)$$

となる。ただし、

$$\mathbf{P}_{u,i}(k) = \tilde{\mathbf{u}}_i(k) \mathbf{u}_i^T(k) \quad (32)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_i(k) = \mathbf{u}_i(k) / \|\mathbf{u}_i(k)\|^2 \quad (33)$$

である。更に、(22) で示した  $\mathbf{u}_i(k)$  の直交性より

$$\mathbf{P}_{u,i}(k) \mathbf{P}_{u,j}(k) = \begin{cases} \mathbf{P}_{u,i}(k) & (i = j), \\ \mathbf{0} & (i \neq j) \end{cases} \quad (34)$$

なる関係があるので、(31) は、

$$\begin{aligned} \epsilon(k) &= \prod_{i=0}^{p-1} [\mathbf{I} - \mu \mathbf{P}_{u,i}(k)] \epsilon(k-1) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{p-1} \mu \tilde{\mathbf{u}}_i(k) n_{f,i}(k) \end{aligned} \quad (35)$$

と書き直すことができる。

#### 過渡誤差

入力信号  $x(k)$ 、射影次数  $p$  に対する係数 2 乗誤差を  $J_{AP,x,p}(k)$  と表す。過渡状態では NLMS 法と同様に、(35) の右辺第 2 項が無視でき、同右辺第 1 項の  $\epsilon(k-1)$  に関して再帰的に展開することで、

$$\begin{aligned} J_{AP,x,p}(k) &\equiv E \left[ \|\epsilon(k)\|^2 \right] \\ &\approx E \left[ \left\| \prod_{m=1}^k \prod_{i=0}^{p-1} [\mathbf{I} - \mu \mathbf{P}_{u,i}(m)] \epsilon(0) \right\|^2 \right] \end{aligned} \quad (36)$$

で近似することができる。ここで、(36) の右辺において、 $\mu$  が十分 1 より小さく、 $\mu^2 \|\mathbf{P}_{u,i}(m_i) \mathbf{P}_{u,j}(m_j) \epsilon(0)\|$  などの  $\mu$  の 2 乗以上のノルムとその射影行列  $\mathbf{P}_{u,i}(m_i)$  と  $\mathbf{P}_{u,j}(m_j)$  の順序を入れ替えたノルム  $\mu^2 \|\mathbf{P}_{u,j}(m_j) \mathbf{P}_{u,i}(m_i) \epsilon(0)\|$  の差の総和が  $\mu$  に比例するノルム  $\mu \|\mathbf{P}_{u,i} \epsilon(0)\|$  の総和より十分小さいと仮定できるなら、 $i$  と  $m$  に関する二つのべき乗を交換することができ、

$$\begin{aligned} J_{AP,x,p}(k) &\approx E \left[ \left\| \prod_{i=0}^{p-1} \prod_{m=1}^k [\mathbf{I} - \mu \mathbf{P}_{u,i}(m)] \epsilon(0) \right\|^2 \right] \end{aligned} \quad (37)$$

と近似できる。

このとき、(10) で示された NLMS 法の係数 2 乗誤差と比較すると、 $\prod_{m=1}^k [\mathbf{I} - \mu \mathbf{P}_{u,i}(m)] \epsilon(0)$  は、 $i$  次の予測フィルタからの残差系列  $\{u_i(0), u_i(1), \dots, u_i(k)\}$  (以下  $\{u_i\}$  と略) を入力信号とし、NLMS 法によりフィルタを更新した場合の係数 2 乗誤差と見なすことができる。よって、(37) は、時刻  $k$  での (過渡) 係数 2 乗誤差が、まず、図-4 での NLMS 適応系のどれかでフィルタを  $k$  回だけ更新し、次に、別の NLMS 適応系で  $k$  回だけフィルタを更新する、ということをするすべての NLMS 適応系で行ったときのフィルタ係数 2 乗誤差として得られるということを意味している。

更に、この解釈を元に、AP 法の係数 2 乗誤差  $J_{AP,x,p}(k)$  を予測残差系列  $\{u_i\}$ 、( $i = 0, 1, \dots, p-1$ ) に対する NLMS 法の係数 2 乗誤差  $J_{NLMS,u_i}$  のみで表現することを考える。

(37) は途中まで収束している係数を初期値として、NLMS 法を適用することを意味するが、一般には、NLMS 法の収束の過渡特性はフィルタ係数の初期係数誤差に依存する。このため、AP 法の時刻  $k$  での係数 2 乗誤差  $J_{AP,x,p}(k)$  の  $J_{AP,x,p}(0)$  に対する比は予測残差  $\{u_i\}$ 、( $i = 0, 1, \dots, p-1$ ) に対する時刻  $k$  での係数 2 乗誤差  $J_{NLMS,u_i}(k)$  の  $J_{NLMS,u_i}(0)$  に対する比の積にはならない。そこで、係数誤差の初期値の影響を以下のように扱えると仮定する。つまり、係数

誤差が  $J_{AP,x,i}(k)$  から開始する予測残差系列  $\{u_i\}$  を入力とした NLMS 法の係数 2 乗誤差  $J_{NLMS,u_i}(k)$  の収束曲線は、係数誤差の初期値を乱数で与えたときの  $J_{NLMS,u_i}(k)$  の収束曲線を  $J_{NLMS,u_i}(\kappa) = J_{AP,x,i}(k)$  となるように  $J_{NLMS,u_i}(k)$  を時間軸方向に  $\kappa$  だけ平行移動したものになると仮定する。

例えば、2 次の AP 法の時刻  $k$  での係数 2 乗誤差  $J_{AP,x,2}(k)$  は、仮定より予測残差系列  $\{u_{2-1}\}$  を入力した係数誤差  $J_{NLMS,u_{2-1}}(k)$  が 1 次の AP 法の時刻  $k$  での係数誤差  $J_{AP,x,2-1}(k)$  となる時刻  $J_{NLMS,u_{2-1}}^{-1}(J_{AP,x,2-1}(k))$  を開始点として、1 次の予測残差を入力とする NLMS 法の収束曲線を  $k$  時刻進んだ  $J_{NLMS,u_1}(J_{NLMS,u_{2-1}}^{-1}(J_{AP,x,2-1}(k)) + k)$  になる。同様にして、入力信号が  $x$  の  $p$  次の AP 法の係数 2 乗誤差 (37) は、

$$J_{AP,x,p}(k) \approx J_{NLMS,u_{p-1}}(J_{NLMS,u_{p-1}}^{-1}(J_{AP,x,p-1}(k)) + k) \quad (38)$$

と近似され、(38) を再帰的に適用すると  $J_{AP,x,p}$  が残差系列  $\{u_i\}$ , ( $i = 0, 1, \dots, p-1$ ) に対する NLMS 法の係数 2 乗誤差  $J_{NLMS,u_i}$  のみで表現される。

#### 定常誤差

NLMS 法の場合と同様に (31) の両辺の 2 乗の期待値をとる。

$$\begin{aligned} E[\|\epsilon(k)\|^2] = & E\left[\left\|\left[I - \mu \sum_{i=0}^{p-1} P_{u,i}(k)\right] \epsilon(k-1)\right\|^2\right] \\ & + E\left[\epsilon^T(k-1) \left[I - \mu \sum_{i=0}^{p-1} P_{u,i}(k)\right]^T \right. \\ & \times \left. \left[\sum_{i=0}^{p-1} \mu \tilde{u}_i(k) n_{f,i}(k)\right]\right] \\ & + E\left[\left[\sum_{i=0}^{p-1} \mu \tilde{u}_i(k) n_{f,i}(k)\right]^T \right. \\ & \times \left. \left[I - \mu \sum_{i=0}^{p-1} P_{u,i}(k)\right] \epsilon(k-1)\right] \\ & + E\left[\left\|\sum_{i=0}^{p-1} \mu \tilde{u}_i(k) n_{f,i}(k)\right\|^2\right] \quad (39) \end{aligned}$$

更に、(22), (32) で示した  $u_i(k)$  の直交性より

$$E[\|\epsilon(k)\|^2] = E\left[\epsilon^T(k-1) \left[I - \mu(2-\mu) \sum_{i=0}^{p-1} P_{u,i}(k)\right] \epsilon(k-1)\right]$$

$$\begin{aligned} & + E\left[2\mu(1-\mu) \sum_{i=0}^{p-1} \epsilon^T(k-1) \tilde{u}_i(k) n_{f,i}(k)\right] \\ & + E\left[\sum_{i=0}^{p-1} \mu^2 n_{f,i}^2(k) / \|\mathbf{u}_i(k)\|^2\right] \quad (40) \end{aligned}$$

上式の右辺第 2 項にある期待値は、 $\epsilon^T(k-1) \tilde{u}_i(k)$  と  $n_{f,i}(k)$  の独立性と  $n_{f,i}(k)$  の期待値が 0 であることが仮定できると、0 になる。また、右辺の第 3 項は分子と分母が独立事象となるので個別に期待値をとることができる。以上を考慮すると、(40) は

$$\begin{aligned} E[\|\epsilon(k)\|^2] = & E[\|\epsilon(k-1)\|^2] \\ & - \mu(2-\mu) E\left[\left\|\sum_{i=0}^{p-1} P_{u,i}(k) \epsilon(k-1)\right\|^2\right] \\ & + \sum_{i=0}^{p-1} \mu^2 E[n_{f,i}^2(k)] / E[\|\mathbf{u}_i(k)\|^2] \quad (41) \end{aligned}$$

となる。この式に、定常状態条件

$$E[\|\epsilon(k)\|^2] = E[\|\epsilon(k-1)\|^2] \quad (42)$$

を代入し、極限  $k \rightarrow \infty$  で表すと、(41) は、

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} E\left[\left\|\sum_{i=0}^{p-1} P_{u,i}(k) \epsilon(k-1)\right\|^2\right] = \\ \frac{\mu}{2-\mu} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{E[n_{f,i}^2(k)]}{E[\|\mathbf{u}_i(k)\|^2]} \quad (43) \end{aligned}$$

となる。左辺の期待値の中は、(34) より、

$$\left\|\sum_{i=0}^{p-1} P_{u,i}(k) \epsilon(k-1)\right\|^2 = \sum_{i=0}^{p-1} \|P_{u,i}(k) \epsilon(k-1)\|^2 \quad (44)$$

と書ける。予測残差系列  $\{u_i(k)\}$  を入力とした NLMS 法による係数誤差を  $\epsilon_{u,i}(k)$  と表すと、付録の式 (A.6) の導出と同様に、

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} E[\|P_{u,i}(k) \epsilon_{u,i}(k-1)\|^2] L = \\ \lim_{k \rightarrow \infty} E[\|\epsilon_{u,i}(k-1)\|^2] \quad (45) \end{aligned}$$

となる。

左辺は、NLMS 法における付録の式 (A.5) から (A.6) の導出と同様に、予測残差  $u_i(k)$  と係数誤差ベクトル  $\epsilon(k-1)$  の各要素が独立であり、また、係数誤差ベクトル  $\epsilon(k-1)$  の各要素も互いに独立で期待値が 0 であると仮定すると、予測残差系列  $\{u_i(k)\}$  を入力とした NLMS 法による係数誤差  $\epsilon_{u,i}(k)$  の定常状態 2 乗誤差が求まる。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \left[ \left\| \sum_{i=0}^{p-1} \mathbf{P}_{u_i}(k) \boldsymbol{\epsilon}(k-1) \right\|^2 \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} E \left[ \sum_{i=0}^{p-1} \|\boldsymbol{\epsilon}_{u_i}(k-1)\|^2 \right] / L \quad (46)$$

ステップサイズ  $\mu$  の絶対値が十分小さい場合には、毎時刻のフィルタ係数の更新が  $p$  個ある予測残差ベクトル  $\mathbf{u}_i(k)$  の方向へ等量行われていると仮定すると、

$$J_{AP,x,p}(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} E [\|\boldsymbol{\epsilon}(k-1)\|^2] = \lim_{k \rightarrow \infty} E \left[ \sum_{i=0}^{p-1} \|\boldsymbol{\epsilon}_{u_i}(k-1)\|^2 \right] \quad (47)$$

となる。(47) に (46) の関係と (43) を代入することで、AP 法の定常誤差  $J_{AP,x,p}(\infty)$  は、

$$J_{AP,x,p}(\infty) = \frac{\mu}{2-\mu} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{E [n_{f,i}^2(k)]}{E [\|\mathbf{u}_i(k)\|^2] / L} \quad (48)$$

と書き直すことができる。ここで、もし、雑音  $n$  が白色雑音であれば、

$$E [n_{f,i}^2(k)] = E [\|\mathbf{f}_i(k)\|^2] \sigma_n^2 \quad (49)$$

である。NLMS 法の定常誤差を表す (11) において、 $\sigma_x$  と  $\sigma_n$  をそれぞれ  $E [\|\mathbf{u}_i(k)\|^2] / L$  と  $E [n_{f,i}^2(k)]$  で置き換えたものを (48) に代入すると、

$$J_{AP,x,p}(\infty) = \sum_{i=0}^{p-1} J_{NLMS,u_i}(\infty) \quad (50)$$

と書ける。この式は、AP 法の定常誤差が、予測残差を入力とした NLMS 法による 2 乗誤差の総和に等しいことを意味している。

### 5. 計算機シミュレーションによる検証

複合 NLMS 法モデルに基づいた AP 法の過渡状態と定常状態の係数 2 乗誤差の表現の妥当性・有効性を検証するために、以下の条件でシステム同定のシミュレーションを行った。

- 最適フィルタ  $\mathbf{h}_0$  と適応フィルタ  $\hat{\mathbf{h}}$  の要素数がともに  $L = 128$ 。
- ステップサイズ  $\mu = 1/16$ 。
- 入力信号としては、モデル試験用として四つのガウス雑音を、また拡声通信における実際の信号として男性の音声を用いた。

ガウス雑音は自己相関の強さと相関の次数の二つの観点から、自己相関の弱く周波数振幅特性が平坦な信号として白色ガウス雑音と相関次数の高い 8

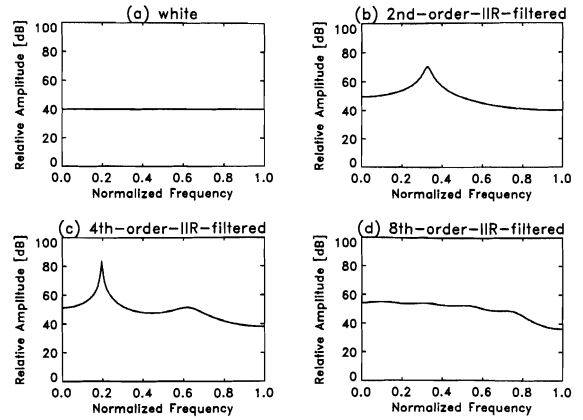


図-5 試験信号のワースペクトル

縦軸は相対パワー [dB]、横軸は規格化周波数。(a) に白色ガウス雑音、(b)、(c) と (d) にはそれぞれ 2 次、4 次、8 次の IIR フィルタに白色ガウス雑音を通過させた有色信号のスペクトルを示す。

次の信号、自己相関が強く周波数振幅特性に急峻なピークが現れる信号として相関次数が 2 次と 4 次の信号を用いた。白色信号以外の有色ガウス雑音は白色ガウス雑音を IIR フィルタに通すことで得た。IIR フィルタの係数は、2 次では、1, -0.98, 0.9, 4 次では、1, -1, 0.620097, -0.429807, 0.627265, 8 次では、1, -0.8, 0.7, -0.6, 0.5, -0.4, 0.3, -0.2, 0.1 である。これらの信号の周波数振幅スペクトルを図-5(a)~(d) に示す。

一方、音声信号は、8 kHz でサンプリングした男性音声を用いた。その波形を図-9(a) に示す。

- 提案モデルにおいて、予測残差  $\mathbf{u}_i(k)$  を求めるための予測係数  $f_i$  の値はガウス雑音の場合は、入力信号の共分散行列  $\mathbf{X}^T(k)\mathbf{X}(k)$  の全区間に渡る平均値から求めた。音声の場合には、音声定常信号ではないため 1 サンプルごとに、予測係数  $f_i(k)$  を求めその予測係数と入力信号系列  $\{x\}$  と雑音系列  $\{n\}$  から入力信号の予測残差  $\mathbf{u}_i(k)$  と雑音の予測残差  $n_{f,i}(k)$  を求め、(48) 右辺の集合平均は適応フィルタ長  $L$  サンプルの時間平均とした。
- AP 法で処理する際の (17) における  $\delta$  は、過渡誤差のシミュレーションでは、 $\delta = 0$ 、定常誤差のシミュレーションでは、信号がガウス雑音の場合は  $\delta = 0.01\sigma_x^2 L$ 、音声の場合は  $\delta = 0.03\sigma_x^2 L$  とした。

まず、ガウス雑音に対する結果について述べる。

#### 過渡誤差

図-6(a)~(d) に四つの入力信号に対する係数 2 乗誤差の収束曲線を示す。射影次数は、白色信号、2 次の有色信号に対しては  $p = 2$ 、4 次と 8 次の有色信号に

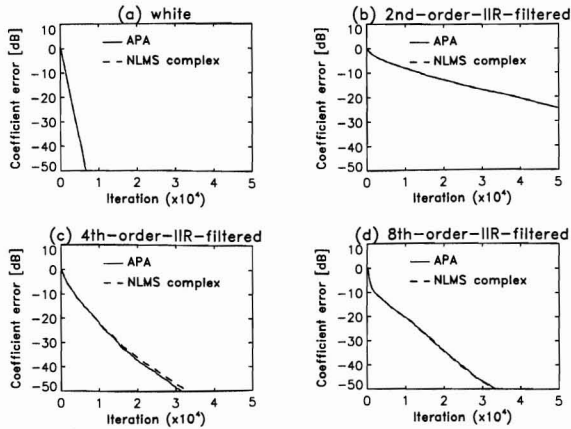


図-6 過渡 2 乗誤差特性の (37) による近似の検証  
 (a) 白色雑音入力, (b) 2 次の有色信号入力, (c) 4 次の有色信号入力, (d) 8 次の有色信号入力。実線は AP 法による収束曲線, 破線は (37) に示した AP 法を NLMS 法の繰り返し適用として近似した収束曲線を表す。

対しては  $p = 3$  である。実線は AP 法によるもので、破線は (37) に示した AP 法を NLMS 法を繰り返し適用するという近似式によるものである。実線と破線の差は数 dB 未満であり、AP 法を NLMS 法の繰り返しと近似することが妥当であることが分かる。

図-7(a)~(d) には四つの入力信号に対して、AP 法による係数 2 乗誤差の収束曲線を実線で示し、 $p$  個の予測残差信号を入力としたときの NLMS 法の収束曲線を点線で示す ((a) では二つの点線が重なっている)、また、(38) による AP 法の近似収束曲線を破線で示す。射影次数は前図-6 と同じである。(38) は予測残差に対する NLMS 法の収束曲線から AP 法による収束曲線の近似するというもので、この近似による破線で示した近似曲線は AP 法による実線と、(c) の 4 次の有色信号の結果以外では、前図-6 の (37) による近似と同様により近似を与えている。

図-7 からは、ステップサイズが同じならば NLMS 法より AP 法の方が収束速度が速いという AP 法の一般的特徴も理解される。図-7 における最も上の点線 (最も収束の遅い点線) は 0 次の予測残差  $u_0(k)$  に対する収束曲線を表しており、 $u_0(k) = x(k)$  なのでこれは  $x(k)$  に対する NLMS 法の結果である。一方、予測信号ではスペクトルが平坦化されており NLMS 法であっても速い収束が得られる。AP 法の場合には、元の信号に対する NLMS 法に加えて、予測残差に対するより収束の速い NLMS 法によっても収束するため、NLMS 法より収束速度が速くなる。最終的な収束曲線 (破線) は個々の予測残差信号の収束曲線 (点線) を更の下回った (速い速度で収束した) ものとなっている。

**定常誤差**

提案するモデルと従来法による定常誤差の近似結果の

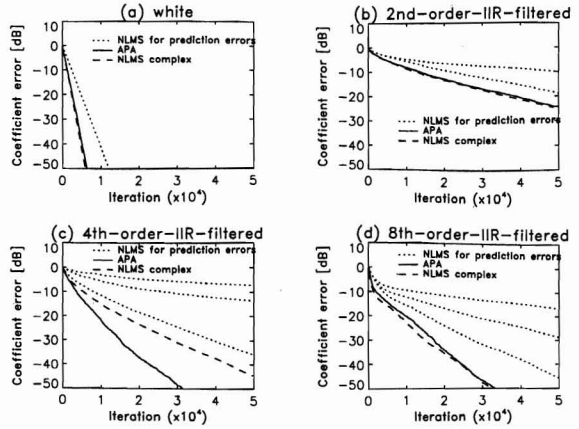


図-7 過渡 2 乗誤差特性の (38) による近似の検証  
 (a) 白色雑音入力, (b) 2 次の有色信号入力, (c) 4 次の有色信号入力, (d) 8 次の有色信号入力。実線は AP 法による収束曲線, 点線は入力信号の予測残差を入力としたときの NLMS 法の収束曲線, そして、破線は (38) による NLMS 法の収束曲線から得た AP 法の近似収束曲線を表す。

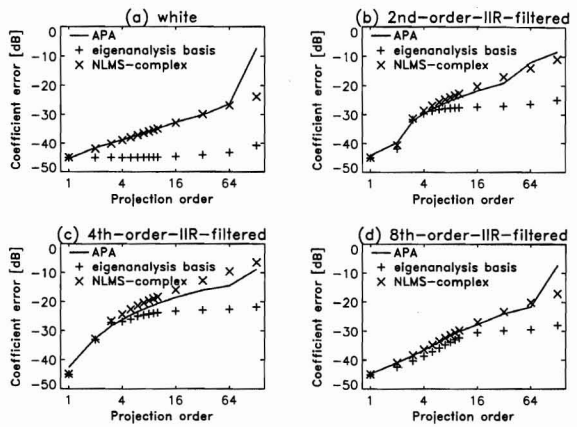


図-8 射影次数と定常状態係数 2 乗誤差の関係の近似結果  
 (a) 白色雑音入力, (b) 2 次の有色信号入力, (c) 4 次の有色信号入力, (d) 8 次の有色信号入力。射影次数は、 $p = 1, 2, 3, \dots, 10, 16, 32, 64, 128$ 。実線は AP 法を動作させて得られた結果 (真値)。「+」は文献 [9] にある固有値分析に基づく近似結果、「x」は提案手法による近似結果。

比較を行った。図-8(a)~(d) は定常誤差と射影次数の関係を示した図で、横軸は射影次数、縦軸は定常誤差の大きさを表している。(a)~(d) はそれぞれ白色雑音入力、2 次、4 次、8 次の有色信号入力に対する結果を示している。射影次数は、 $p = 1, 2, 3, \dots, 10, 16, 32, 64, 128$  である。また、目的音  $d$  に目的音より 30dB 小さい白色ガウス雑音を付加した。実線は各次数において AP 法を動作させた場合の定常誤差の値を結んだもので、次数の増加に伴って誤差が増加していることが分かる。また、「+」印は文献 [9] にある固有値分析に基づく定常誤差の近似式、



$$\mathcal{M}_p \approx \frac{\mu L \sigma_n^2}{2\lambda_{min,p}} \quad (51)$$

による値を示す。ただし、 $\lambda_{min,p}$  は  $p$  次の共分散行列  $E[\mathbf{X}^T(k)\mathbf{X}(k)]$  の最小固有値である。この近似値では次数  $p$  が大きくなるにつれて不正確になっていくことが分かる。一方、「×」印は提案モデルに基づいた(48)による近似結果を示す。近似結果と AP 法による結果との差は  $p = 128$  以外では最大で数 dB 程度であり、良い近似を与えることが分かる。

$p = 128$  での AP 法による結果が提案した近似法と既存の近似法より大きくなる原因は、使用する入力信号の共分散行列の違いにある。近似法では  $E[\mathbf{X}^T(k)\mathbf{X}(k)]$  と平均値を用いるため、共分散行列から求められる予測残差のパワーや固有値も平均的に値になるが、AP 法では瞬時の共分散行列を用いるため予測残差のパワーや固有値の分散が大きい。小さな固有値が現れることが多い。定常誤差は予測残差のパワーや固有値の逆数に比例すると考えられるので、 $p = 128 (= L)$  のように小さい予測残差パワーや固有値が現れる状況では AP 法の方が近似法に比べて定常誤差が大きくなる。

AP 法の一般的な特徴として射影次数あるいは入力信号の自己相関が大きいほど (図-5 で、ピークが急峻なほど) 定常誤差も大きくなるということが知られている。この AP 法の特徴が生じる理由を複合 NLMS 法モデルからみると、次のような解釈ができる。

まず、(48) において、射影次数が増加するに伴って、加算される項が増加し誤差  $J_{AP,x,p}(\infty)$  が単調に増加することから理解できる。また、射影次数 (予測次数) が増加すると、予測残差  $\mathbf{u}_i(k)$  は白色化され、ほぼ一定の大きさとなる。よって、(48) 右辺の  $E[n_{f,i}^2(k)] / (E[\|\mathbf{u}_i(k)\|^2] / L)$  は  $i$  によらず一定値となるため  $p$  に比例して  $J_{AP,x,p}(\infty)$  が増加することが説明できる。このことは固有値を利用する従来の予測式 (51) では説明できない。

一方、入力信号の自己相関が大きい場合には、予測残差信号  $\mathbf{u}_i(k)$  は小さなものになる。すなわち、(48) 右辺の分母項が小さい値となるため、 $J_{AP,x,p}(\infty)$  が大きな値となる。このことより相関の大きい信号 (c) は信号 (a) や (d) より定常誤差が大きくなっていることが説明できる。

次に音声に対する結果を図-9 に示す。同図 (b) は係数 2 乗誤差の収束曲線を表す。射影次数は  $p = 3$  である。実線は AP 法によるもので、破線は (37) に示した AP 法を NLMS 法の繰り返し適用するという近似式によるものである。実線と破線の差は数 dB 程度であり、音声に対しても AP 法を NLMS 法の繰り返しと

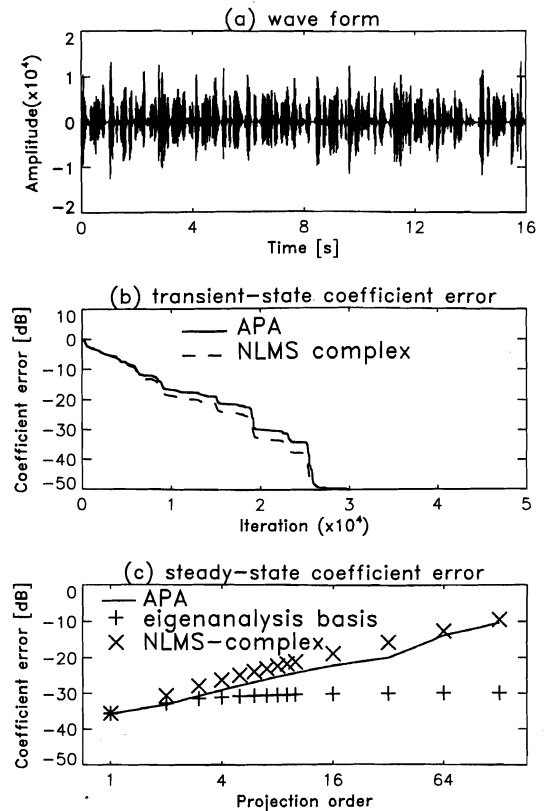


図-9 音声信号とそれに対する近似結果  
(a) 音声波形, (b) 過渡 2 乗誤差特性の (37) による近似の検証, (c) 射影次数と定常状態係数 2 乗誤差の関係の近似結果, 記号の意味は, 図-6 と図-8 を参照。

近似することが妥当なことが分かる。図-9(c) は定常誤差と射影次数の関係を示した図であり、実線は AP 法の各次数における結果を結んだものであり、「×」印は提案した (48), 「+」印は固有値分析に基づく誤差の近似式による値を示す。なお、提案した (48) の計算は、先に実験条件のところで述べたようにサンプルごとに求めた入力信号  $x$  と雑音  $n$  の予測残差から求めたが、固有値分析に基づく方法においても、サンプルごとに入力信号の共分散行列  $\mathbf{X}^T(k)\mathbf{X}(k)$  の最小固有値から (51) を求め時間平均した値を用いている。実線と「×」印の差は最大で数 dB 程度であることから提案モデルに基づいた近似結果がよい近似を与えることが分かる。また、「+」印は射影次数を上げると実線から離れ、不正確になっていくことが分かる。

以上、過渡状態と定常状態での係数 2 乗誤差の近似式と実際の値を比較した結果、近似式と実際の収束特性がよく一致し、複合 NLMS 法モデルが AP 法の収束特性を定量的に説明できることが分かった。また、射影次数や入力信号による収束特性の違いを複合 NLMS 法モデルは定性的に説明できることも分かった。

## 6. ま と め

AP法の収束特性の容易な理解を目的として、AP法を入力信号の予測残差を入力とする複数のNLMS法の集まりと解釈する複合NLMS法モデルを示した。次に、このモデルから、AP法の過渡状態と定常状態の係数2乗誤差をNLMS法のそれと表現する近似式を導出した。すなわち、過渡誤差は、入力信号の0次から射影次数-1次までの予測残差を入力とするNLMS法を繰り返し適用することで、定常誤差は各予測残差を入力とするNLMS法で生じる定常誤差の和として近似した。白色信号と強い自己相関のある信号を含む四つのガウス雑音及び音声入力信号に対する計算機シミュレーションの結果、提案法による定常状態2乗誤差の近似は従来の固有値を用いた解析と比べて良好な近似を行うことができ、射影次数や入力信号による収束特性の違いを定性的に説明できることが示された。

## 文 献

- [1] 雛元孝夫, 前川禎男, “拡張された学習同定法,” 信学論 (C), 95, 227-234 (1975).
- [2] 尾関和彦, 梅田哲夫, “アフィン部分空間への直交射影を用いた適応フィルタ・アルゴリズムとその諸性質,” 信学論 (A), J67-A, 126-132 (1984).
- [3] J. Nagumo and A. Noda, “A learning method for system identification,” *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-12, 282-287 (1967).
- [4] 丸山唯介, “射影アルゴリズムの高速算法,” 信学大全, B-744 (1990.3).
- [5] 田中雅史, 金田 豊, 牧野昭二, “高次の射影アルゴリズムの演算量削減について,” 信学大全, A-103 (1993.8).
- [6] S.L. Gay, “A fast converging, low complexity adaptive filtering algorithm,” *Proc. 3rd Int. Workshop on Acoustic Echo Control*, pp. 223-226 (1993).
- [7] 高松松三, 谷萩隆嗣, “学習同定法と直交射影算法の収束速度について,” 信学論 (A), J73-A, 652-655 (1990).
- [8] S.L. Gay, “Fast projection algorithms with application to voice echo cancellation,” Ph.Dthesis, New Brunswick, New Jersey (1994).
- [9] B. Baykal, O. Tanrikulu and A.G. Constantinides, “Asymptotic analysis of the underdetermined recursive least-squares algorithm,” *Proc. EUSIPCO-96* (1996).
- [10] H. Besbes, Y.B. Jemaa and M. Jaidane, “Exact convergence analysis of affine projection algorithm: the finite alphabet input case,” *Proc. ICASSP 99*, pp. 1441-1444 (1999).
- [11] S.G. Sankaran and A.A. (Louis) Beex, “Convergence behavior of affine projection algorithms,” *IEEE Trans. Signal Process.*, SP-48, 1086-1096 (2000).
- [12] 福本昌弘, 久保田一, 辻井重男, “安定性を保証した確率的最速な学習同定法,” 信学論 (A), J78-A, 778-787 (1995).
- [13] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 3rd Ed. (Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1996), pp. 276-280.
- [14] J.A. Bucklew, T. Kurtz and W.A. Sethares, “Weak convergence and local stability properties of fixed stepsize algorithms,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, IT-39, 966-978 (1993).

## 付録 NLMS法の定常誤差(11)の導出

まず, (6)の2乗ノルムの期待値をとる。射影行列の性質,  $\mathbf{P}_x^T(k) = \mathbf{P}_x(k)$ ,  $\mathbf{P}_x(k)\mathbf{P}_x(k) = \mathbf{P}_x(k)$ ,  $\mathbf{P}_x(k)\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k)$  に注意すると,

$$\begin{aligned} E[\|\epsilon(k)\|^2] &= E[\epsilon^T(k-1)[\mathbf{I} - \mu(2-\mu)\mathbf{P}_x(k)]\epsilon(k-1)] \\ &\quad + E[\epsilon^T(k-1)[\mathbf{I} - \mu\mathbf{P}_x(k)]\mu\tilde{\mathbf{x}}(k)n(k)] \\ &\quad + E[\mu\tilde{\mathbf{x}}^T(k)n(k)[\mathbf{I} - \mu\mathbf{P}_x(k)]\epsilon(k-1)] \\ &\quad + E[\mu^2 n^2(k) / \|\mathbf{x}(k)\|^2] \\ &= E[\epsilon^T(k-1)[\mathbf{I} - \mu(2-\mu)\mathbf{P}_x(k)]\epsilon(k-1)] \\ &\quad + E[2\mu(1-\mu)\epsilon^T(k-1)\tilde{\mathbf{x}}(k)n(k)] \\ &\quad + E[\mu^2 n^2(k) / \|\mathbf{x}(k)\|^2] \quad (A.1) \end{aligned}$$

(A.1)の右辺の第2項にある期待値は以下の仮定の下で0となる。(6)より $\epsilon(k-1)$ は過去(時刻 $k-1$ 以前の)入力信号と過去の雑音から成っている。このとき、現時刻 $k$ の雑音 $n(k)$ と入力信号の系列 $x$ 及び過去の雑音が独立だと仮定すると,  $E[\epsilon^T(k-1)\tilde{\mathbf{x}}(k)n(k)] = E[\epsilon^T(k-1)\tilde{\mathbf{x}}(k)] E[n(k)]$ となる。更に,  $n(k)$ の期待値が0と仮定すると, (A.1)の右辺第2項にある期待値は0となる。

(A.1)の右辺第3項は分子と分母が独立事象なので個別に期待値をとることができる。以上を考慮すると, (A.1)は,

$$\begin{aligned} E[\|\epsilon(k)\|^2] &= E[\|\epsilon(k-1)\|^2] \\ &\quad - \mu(2-\mu)E[\|\mathbf{P}_x(k)\epsilon(k-1)\|^2] \\ &\quad + \mu^2 E[n^2(k)] / E[\|\mathbf{x}(k)\|^2] \quad (A.2) \end{aligned}$$

となる。ここで, (A.2)に定常状態を意味する条件

$$E[\|\epsilon(k)\|^2] = E[\|\epsilon(k-1)\|^2] \quad (A.3)$$

を代入し, 定常状態であることを明確にするために,  $k \rightarrow \infty$  とすると,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} E[\|\mathbf{P}_x(k)\epsilon(k-1)\|^2] &= \frac{\mu}{2-\mu} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E[n^2(k)]}{E[\|\mathbf{x}(k)\|^2]} \\ &= \frac{\mu}{2-\mu} \frac{\sigma_n^2}{L\sigma_x^2} \quad (A.4) \end{aligned}$$

の関係が得られる。

(A.4)の左辺を詳しく見るために, (A.4)に(7)と(8)を代入すると,

$$\begin{aligned}
 & \lim_{k \rightarrow \infty} E [\|P_x(k)\epsilon(k-1)\|^2] \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} E \left[ \epsilon^T(k-1)\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\epsilon(k-1) / \|\mathbf{x}(k)\|^2 \right] \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} E \left[ \left( \sum_{i=0}^{L-1} x(k-i)\epsilon_i(k-1) \right)^2 / \|\mathbf{x}(k)\|^2 \right] \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} E \left[ \sum_{i=0}^{L-1} x^2(k-i)\epsilon_i^2(k-1) / \|\mathbf{x}(k)\|^2 \right] \\
 &+ \lim_{k \rightarrow \infty} E \left[ \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{L-1} x(k-i)x(k-j) \right. \\
 &\quad \left. \times \epsilon_i(k-1)\epsilon_j(k-1) / \|\mathbf{x}(k)\|^2 \right] \tag{A.5}
 \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\epsilon_i(k-1)$  は、 $\epsilon(k-1)$  の  $i$  番目の要素である。定常状態においては入力  $x(k)$  と係数誤差ベクトル  $\epsilon(k-1)$  の各要素が独立であり、また、係数誤差ベクトル  $\epsilon(k)$  の各要素も互いに独立で期待値が 0 であると仮定できるので [14], (A.5) の右辺第 2 項は 0 となる。また、 $x^2(k-i) / \|\mathbf{x}(k)\|^2$  と  $\epsilon_i^2(k-1)$  の独立性が仮定できると、(A.5) の右辺第 1 項は、 $E[\|\mathbf{x}(k)\|^2] = LE[x^2(k)]$ ,  $E[\sum_{i=0}^{L-1} \epsilon_i^2(k-1)] = E[\|\epsilon(k-1)\|^2]$  であることから、 $\lim_{k \rightarrow \infty} E[\|\epsilon(k-1)\|^2] / L$  となる。これら

より,

$$\begin{aligned}
 & \lim_{k \rightarrow \infty} E [\|P_x(k)\epsilon(k-1)\|^2] L \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} E [\|\epsilon(k-1)\|^2] \tag{A.6}
 \end{aligned}$$

以上, (A.3), (A.4), (A.6) より, 定常状態での係数 2 乗誤差を表す (11) が以下のとおり導かれる。

$$\begin{aligned}
 J_{\text{NLMS},x}(\infty) &\equiv \lim_{k \rightarrow \infty} E [\|\epsilon(k)\|^2] \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} E [\|\epsilon(k-1)\|^2] \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} E [\|P_x(k)\epsilon(k-1)\|^2] L \\
 &= \frac{\mu}{2 - \mu} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2} \tag{A.7}
 \end{aligned}$$

**田中 雅史**

平 2 年北大・工・修士課程了。同年 NTT 入社。以来、適応フィルタ、マイクロホンアレーの研究開発に従事。電子情報通信学会会員。

**金田 豊**

昭 52 名大・工・情報・修士課程了。同年日本電信電話公社 (現 NTT) 入社。以来、NTT 研究所において、音響信号処理の研究に従事。平 12 より東京電機大学情報通信工学科教授。現在に至る。工博。平 1 マイクロホンアレーの研究により日本音響学会佐藤論文賞を受賞。電子情報通信学会, IEEE, 米国音響学会各会員。